

МАТЕМАТИКА

Э. А. Мирзаханян

Бесконечномерные гомотопические группы

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 2/II 1966)

В заметке строятся гомотопические группы конечного индекса для множеств, лежащих в действительном гильбертовом пространстве H . Первоначальное их определение зависит от выбора некоторого ортонормированного базиса в H ; в дальнейшем показывается независимость построенных групп от выбора базиса и их коммутативность. Основным результатом заметки заключается в том, что гомотопическая группа индекса k единичной сферы S пространства H изоморфна стабилизировавшейся группе индекса k конечномерных сфер (т. е. группе $\pi_{k+n}(S^n)$ при больших n).

1. *Построение гомотопических групп.* Пусть $e_1, e_2, \dots$ — некоторый ортонормированный базис пространства H . Обозначим через H_1 подпространство, натянутое на векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$, а через H_2 — его ортогональное дополнение. Далее, выберем в пространстве H_1 , натянутом на векторы $e_1, \dots, e_n$, единичный $(n-1)$ -мерный куб K , а в пространстве H_2 — некоторый выпуклый многогранник M (например, в смысле заметки (¹)), имеющий H_2 своей несущей плоскостью. Тогда в пространстве $H = H_1 + H_2$ определено топологическое (прямое) произведение P многогранников K и M , являющееся многогранником дефекта 1 в H . Многогранник P будем называть призмой (дефекта 1) в H ; размерность n подпространства H_1 будет в дальнейшем предполагаться достаточно большой.

Предположим теперь, что фиксирован некоторый класс F отображений гильбертова пространства H в себе. (Ниже мы сформулируем те требования, которым класс F должен удовлетворять). Пусть $X \subset H$ — некоторое множество и $x_0 \in X$ — фиксированная его точка. Отображение $f: P \rightarrow X$ назовем сфероидом индекса k множества X в точке x_0 ($k = 0, 1, 2, \dots$), если выполнены следующие два условия:

1) отображение f переводит всю границу P многогранника P в точку x_0 ;

2) существует такое отображение $\varphi \in F$, что отображение f совпадает с отображением $I^{-k} \varphi$ (рассматриваемым на P), где через I^{-k} обозначено линейное отображение $H \rightarrow H$, переводящее векторы $e_1, \dots, e_n$ в нуль, а вектор e_i в вектор e_i ($i = 1, 2, \dots$).

Во множестве $F(X, x_0)$ всех таких сферондов мы следующим образом введем отношение эквивалентности: $f \sim g$, если существует такая гомотопия $h_t: P \rightarrow X$, $0 \leq t \leq 1$, что $h_0 = f$, $h_1 = g$ и $h_t \in F_k(X, x_0)$ для всех $t \in I$. Множество получающихся классов эквивалентности мы обозначим через $\pi_k(X, x_0)$.

Как видно из этого определения, множество $\pi_k(X, x_0)$ зависит пока от выбора базиса $e_1, e_2, \dots$ и призмы P .

Пусть $\alpha, \beta \in \pi_k(X, x_0)$ и f, g — сферонды, принадлежащие классам α и β соответственно.

Определим сферонд h соотношением

$$h(0, x_2, \dots) = \begin{cases} f(0, 2x_2, x_3, \dots) & \text{при } 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(0, 2x_2 - 1, x_3, \dots) & \text{при } \frac{1}{2} \leq x_2 \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

(координаты берутся относительно базиса $l_1, l_2, \dots$). Отображение h непрерывно.

Первое требование на класс F заключается в том, чтобы отображение h снова принадлежало множеству $F_k(X, x_0)$, т. е. также было сферондом. Оказывается, что класс γ сфероида h не зависит от выбора представителей f и g , а полностью определяется классами α и β ; мы положим: $\gamma = \alpha + \beta$.

Относительно введенной таким образом операции сложения множество $\pi_k(X, x_0)$ представляет собою группу, которую мы и назовем гомотопической группой индекса k множества $X \subset H$. Обычным образом доказывается, что эта группа всегда коммутативна. (При этом новых требований на класс F накладывать не приходится).

II. *Инвариантность гомотопических групп.* Следующее утверждение представляет собой второе требование, накладываемое на класс F .

Пусть P и P' — два многогранника (дефекта 1) в H . Тогда существует отображение $\varphi \in F$, голоморфно отображающее многогранник P и переводящее границу $\dot{P}$ на границу $\dot{P}'$. Любые два отображения указанного вида гомотопны между собой (в классе F) на P .

Третье требование заключается в том, чтобы композиции $I^{-k} \circ J^k$ и $J^k \circ I^{-k}$ принадлежали классу F , где I^{-k} построено в ортонормированном базисе $l_1, l_2, \dots$ (как указано выше), а линейное отображение J^k определяется в некотором другом ортонормированном базисе $e'_1, e'_2, \dots$ формулой

$$J^k(e'_i) = e'_{i+k}, \quad i = 1, 2, \dots$$

При выполнении этих требований удастся доказать, что определенные выше гомотопические группы $\pi_k(X, x_0)$ не зависят от выбора призмы P и базиса $l_1, l_2, \dots$.

Указанным выше требованиям удовлетворяют разные классы отображений F и, прежде всего, класс всех непрерывных отображе-

ний. Однако этот класс оказывается неинтересным, поскольку, например, все гомотопические группы единичной сферы S пространства H оказываются равными нулю. Иными словами, класс всех непрерывных отображений оказывается слишком широким для построения содержательной бесконечномерной гомотопической теории. Напротив, значительное сужение класса отображений F позволяет установить некоторые содержательные результаты, к изложению которых мы и переходим.

III. *Гомотопические группы сфер.* Наконец, мы предположим дополнительно, что класс F позволяет построить понятие степени отражения ^(2, 3), а также обладает тем свойством, что существует отображение $\varphi \in F$, отображающее шар E_1 дефекта 1 на единичную сферу пространства H , причем вся граница E_1 переходит в одну точку $x_0 \in S$, а внутренность шара E_1 гомеоморфно отображается на $S \setminus x_0$. Всем этим требованиям удовлетворяет, например, класс отображений, локально имеющих вид $\lambda I + A$, где I — тождественный оператор, λ — положительное число (зависящее от точки $x \in H$), а A — почти конечномерный оператор. Некоторые другие классы отображений определены С. С. Рышковым ⁽⁴⁾.

При указанных требованиях, наложенных на класс F , справедлива следующая

Теорема. Пусть S — единичная сфера дефекта 1 в H (т. е. единичная сфера в плоскости дефекта 1—1). Тогда группа $\pi_k(S, x_0)$ изоморфна стабилизировавшейся группе индекса $k + l - 1$ конечномерных сфер, т. е. группе $\pi_{n+k+l-1}(S^n)$ при больших n .

В частности, если S — единичная сфера пространства H , то группа $\pi_k(S, x_0)$ изоморфна стабилизировавшейся группе $\pi_{n+k}(S^n)$.

Автор выражает глубокую благодарность В. Г. Болтянскому, под руководством которого выполнена эта работа.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՄԻՐՋԱԿԱՆՅԱՆ

Անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբեր

Հոդվածում տրվում է իրական Գիլբերտյան տարածության ենթատարածությունների անվերջ չափանի հոմոտոպիկ խմբերի կառուցումը, ապացուցվում է այդ խմբերի ինվարիանտությունը տարածության բազիսի ընտրության նկատմամբ ու նրանց հոմոտոպիկությունը:

Հոդվածի հիմնական արդյունքը կայանում է հետևյալ թեորեմի ապացույցի մեջ.
Թեորեմ. Եթե S -ը նանդիսմունք է Գիլբերտյան տարածության միավոր սֆերան, ապա S -ը սֆերայի k -ինդեքսի հոմոտոպիկ $\pi_k(S, x_0)$ խումբը իզոմորֆ է վերջավոր չափանի սֆերայի k ինդեքսի կայունացված խմբին:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. Г. Болтянский, ДАН СССР, 105, № 6 (1955). ² М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956. ³ Ж. Лерэ, Ю. Шаудер, Топология и функциональные уравнения. УМН, 1, вып. 3—4, стр. 71—95. ⁴ С. С. Рышков, ДАН СССР, 114, № 5 (1957).