ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLII 1966 5

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Р. О. Амасян

К подбору модельных материалов по подобию в статистическом смысле*

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 1 IV 1966)

При моделировании строительных конструкций на сейсмические воздействия делается предположение о полной определенности, детерминированности свойств модельных материалов.

Однако поликристаллическая структура, местные флюктуации химического состава и другие факторы, порождающие флюктуации механических свойств, и, как следствие, локальные возмущения поля напряжений носят изменчивый, случайный характер. Поэтому единичные испытания моделей или их отдельных элементов не могут дать достоверные результаты. Здесь очень важно воспользоваться статистическими методами, которые позволяют более полно и надежно использовать информацию, извлекаемую из результатов испытания моделей и глубже понять значение и смысл полученных данных.

Основные положения статистической теории подобия изложены в монографии академика АН Армянской ССР А. Г. Назарова ([1]).

В наших экспериментальных исследованиях сделана попытка отыскания путей эффективного применения статистической теории подобия к подбору модельных материалов по их предельным прочностям.

Статистический подбор материала по прочностям фактически приводится к установлению подобия в статистическом смысле между кубиками разных размеров и разных прочностей.

При этом системы кубиков разных размеров считаются подобными, если среднеарифметические значения прочностей сравниваемых серий опытных образцов удовлетворяют условию

$$\bar{R}' = \beta \bar{R} \tag{1}$$

и плотности распределения безразмерных величин $\frac{R'}{\bar{R}'}$ и $\frac{R}{\bar{R}}$ тождественны.

---

* При выполнении настоящей работы автор пользовался консультацией Г. А. Амбарцумян, за что выражает ей свою благодарность.

В настоящей статье рассматривается задача статистического моделирования легкого бетона марки М-50 легким бетонам марки М-25.

Так как плотности легких бетонов этих марок приблизительно одинаковы, то множитель подобия для плотности равен $\delta = 1$.

Отсюда, учитывая, что множитель подобия для напряжения $\beta = 0{,}5$, для линейного множителя получим $\alpha = \beta/\delta = 0{,}5$.

Характерный размер контрольных образцов (кубиков) оригинала был принят $l = 20$ *см*, следовательно, характерный размер контрольных кубиков модели будет $l' = \alpha l = 10$ *см*.

Опытные образцы указанных размеров, в количестве 36 шт. каждой серии, изготовлялись из легкого бетона на туфовом песке и щебне Ленинаканского карьера.

Составы бетонов обеих серий, подобранные в соответствии с их предельной прочностью, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Размеры кубиков *см*	Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 $м^3$ бетона в *кг*				в/ц	$\gamma_б$ $т/м^3$
		цемент	песок	щебень	вода		
20×20×20	1 : 2,7 : 4,5	176	480	797	293	1,66	1,746
10×10×10	1 : 3,8 : 6,3	130	493	818	163	1,25	1,604

Для определения предельной прочности все образцы испытывались на центральное одноосное сжатие. Испытания производились в возрасте 28 суток на пятидесятитонном гидравлическом прессе типа 2 ПГ-50А.

Результаты испытания бетонных кубиков каждой серии табулировались в вариационных рядах, которые затем оформлялись графически в виде гистограмм. Для каждой гистограммы подбирались теоретические кривые плотности распределения вероятностей. Случайные отклонения прочностей бетонных кубиков от их средней являются результатом действия большого числа независимых причин и поэтому на основании центральной предельной теоремы можно считать, что удовлетворительное сглаживание полученных гистограмм должно достигаться при использовании нормального (Гаусовского) закона распределения ([2])

$$f(R) = \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R-\overline{R}}{\sigma_R}\right)^2}.$$

При этом выравнивание гистограмм сводилось к нахождению оценок подходящих значений для числовых характеристик нормального распределения: математического ожидания $\overline{R}$ и среднеквадратического отклонения σ_R.

Оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения осуществлялись по формулам:

для математического ожидания

$$\bar{R} = a + \frac{k \Sigma n_k \xi_R}{n},$$

для среднеквадратического отклонения

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{k^2 \Sigma n_k \xi_R^2}{n} - (\bar{R} - a)^2},$$

где ξ_R — случайная величина, вводимая для упрощения промежуточных расчетов,

$$\xi_R = \frac{R - a}{k};$$

n_k — частота случаев;

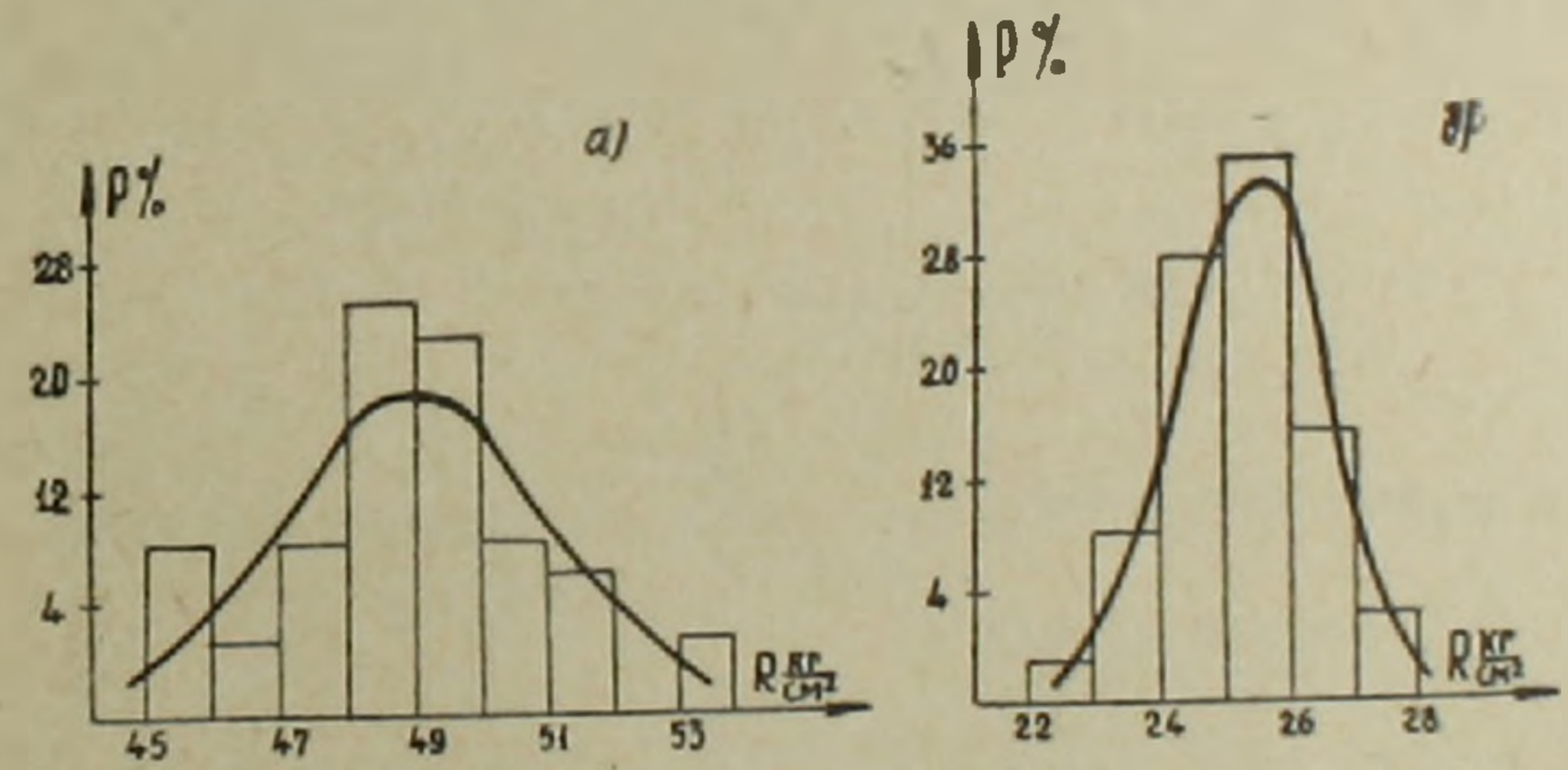
a — произвольное число, вводимое для удобства расчетов („ложный нуль");

k — ширина разряда;

n — объем выборок.

Проверки согласия наблюденных данных с законами нормального распределения при помощи критерия Пирсона — χ^2 дали положительные результаты.

Гистограммы частот обеих серий со своими теоретическими распределениями приведены на фиг. 1*а*, *б*. Как видно из этих графиков,



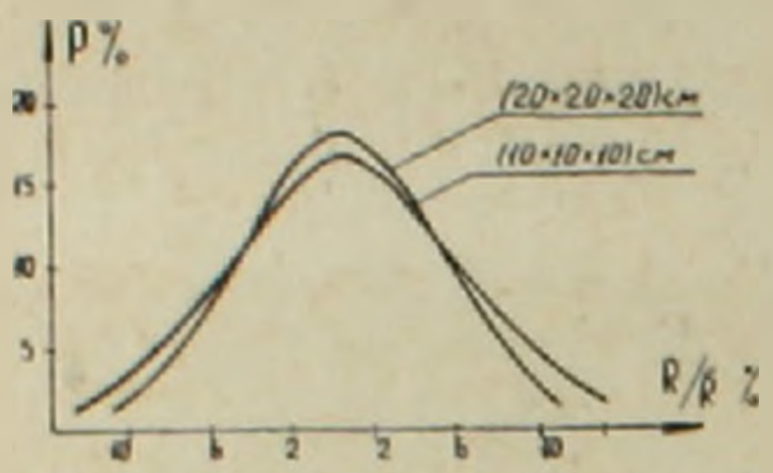
Фиг. 1.

для среднеарифметических значений прочностей условие (1) выполняется с точностью 7%, которая для бетона вполне приемлема. Однако для полного соблюдения статистического подобия необходимо выполнение второго условия: тождественность плотностей распределения безразмерных величин $\frac{R'}{\bar{R}'}$ и $\frac{R}{\bar{R}}$.

Плотности распределения величин $\frac{R'}{\bar{R}'}$ и $\frac{R}{\bar{R}}$, как следует из фиг. 2, по точности не совпадают. Проверка подобности бетонных кубиков

возможна лишь при оценке разницы между их плотностями распределения. Ниже приведем метод их оценки в первом приближении.

Назначим некоторую достаточно большую вероятность γ_1 (например, $\gamma_1 = 0{,}9$ или $0{,}95$) такую, что событие с вероятностью γ_1 можно считать практически достоверным и найдем такое значение ε, для которого



Фиг. 2.

$$P(|R' - \beta R| < \varepsilon) = \gamma_1. \qquad (2)$$

Тогда диапазон практически возможных значений ошибок, возникающий при замене бетона одной марки бетоном другой марки, будет $\pm \varepsilon$. Большие по абсолютной величине ошибки будут появляться только с малой вероятностью $\zeta = 1 - \gamma_1$.

Составим разность

$$X = R' - \beta R, \qquad (3)$$

которая в силу нормальностей случайных величин R' и βR также распределена по нормальному закону с плотностью распределения $f(x)$, средним значением

$$\bar{X} = \bar{R}' - \beta R \qquad (4)$$

и среднеквадратическим отклонением

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2_{R'} + \beta^2 \sigma^2_R}. \qquad (5)$$

Вычисляя вероятность γ_1 с учетом (3)—(5), получим

$$\gamma_1 = P(|R' - \beta R| < \varepsilon) = P(|X| < \varepsilon) =$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\,dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{X - \bar{X}}{\sigma_x}\right)^2} dx.$$

Путем замены переменной $\frac{X - \bar{X}}{\sigma_x \sqrt{2}} = t$ можно выразить вероятность γ_1 через функции Лапласа:

$$\gamma_1 = P(|X| < \varepsilon) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{\varepsilon - \bar{X}}{\sigma_x \sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{\varepsilon + \bar{X}}{\sigma_x \sqrt{2}}\right)\right]. \qquad (6)$$

Так как нам необходимо оценить только дисперсные свойства случайной величины X, то вместо ее, без ущерба для точности расчета, можем рассмотреть центрированную случайную величину

$$\dot{X} = X - \bar{X}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид:

$$\gamma_1 = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma_x \sqrt{2}}\right).$$

Отсюда ε определяется однозначно

$$\varepsilon = \sigma_x \sqrt{2}\, \Phi^{-1}(\gamma_1), \qquad (7)$$

где $\Phi^{-1}(\gamma_1)$ — функция обратная функции Лапласа.

В нашем случае, согласно формуле (7), при надажности $\gamma=0{,}95$, для ε было получено значение $\varepsilon=12{,}2\%$, которое свидетельствует о выполнимости второго условия статистического подобия.

Полученные результаты указывают на то, что статистическое подобие между легкими бетонами марки М-50 и М-25 установлено.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Հ. ՀԱՄԱՍՅԱՆ

Ստատիստիկական առումով մոդելացման նյութերի ընտրության հարցի շուրջ

Հոդվածում բերված է մոդելացման նյութերի ստատիստիկական ընտրության մեթոդիկան ըստ իրենց սահմանային ամրության։ Մասնավորապես դիտարկվում է M 50 մարկայի թեթև բետոնի ստատիստիկական մոդելացման խնդիրը M 25 մարկայի թեթև բետոնով։ Բետոնյա նմուշների երկու սերիաները, որոնց չափերը և քաղադրությունները բերված են 1-ին աղյուսակում, ենթարկված են մեկ առանցքային սեղմման։

Փորձարկումներից ստացված արդյունքների ստատիստիկական մշակումը հանգել է սահմանային ամրությունների հավանականությունների բաշխման կորերի կառուցմանը (գծ. 1, 2), որոնց համեմատության հետագա անալիզից հանված է եզրակացություն երկու տարբեր մարկայի բետոնների մեջ ստատիստիկական նմանության հաստատման մասին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Назаров*, О механическом подобии твердых деформируемых тел. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1965. [2] *Е. С. Вентцель*, Теория вероятностей. Гос. изд. физ. мат. лит., М., 1962.