ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLII 1966 5

МАТЕМАТИКА

Е. Д. Соломенцев

Теорема о трех сферах для гармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 19/I 1966)

Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция в кольце $D=\{z;\ 0<r<|z|=\rho<R<+\infty\}$, непрерывная в замыкании $\overline{D}$. Если $|f(z)|\leq m$ на окружности $S_1=\{z;\ |z|=r\}$ и $|f(z)|\leq M$ на окружности $S_2=\{z;\ |z|=R\}$, то классическая теорема Адамара о трех кругах выражается неравенством

$$|f(z)|\leq m^{\frac{\log\frac{R}{\rho}}{\log\frac{R}{r}}}\,M^{\frac{\log\frac{\rho}{r}}{\log\frac{R}{r}}},\quad z\in D. \tag{1}$$

Неравенство (1) представляет собой количественное выражение граничного свойства единственности ограниченных аналитических функций для кольцевой области D. Желая получить аналоги теоремы Адамара для гармонических функций в пространстве, мы должны, естественно, потребовать, чтобы на границе области налагались ограничения не только на модуль самой функции, но и на модуль ее нормальной производной или градиента. Проблемы такого типа в связи с задачами аппроксимации посредством гармонических функций были поставлены С. Н. Мергеляном ([1]) в 1955 г.

Пусть $x=(x^1,\cdots,x^p)$, $y=(y^1,\cdots,y^p)$ — точки евклидова пространства E^p, $p\geq r$, заданные декартовыми координатами, $|x|=\rho=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^p)^2}$. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в области $D=\{x;\ 0<r<|x|<R<+\infty\}$, непрерывная вместе с частными производными первого порядка по всем координатам в замыкании $\overline{D}$. Обозначим интегралы по граничным сферам $S_1=\{y;\ |y|=r\}$ и $S_2=\{y;\ |y|=R\}$

$$I_1=\frac{1}{\omega_p}\int\limits_{S_1}\left[\,|u(y)|+\left|\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right|\,\right]dS_1,$$

$$I_2=\frac{1}{\omega_p}\int\limits_{S_2}\left[\,|u(y)|+\left|\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right|\,\right]dS_2, \tag{2}$$

где $\omega_p = p\pi^{p/2}/\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)$ — площадь единичной сферы в E^p, а $\partial/\partial n_y$ обозначает дифференцирование по направлению нормали к S_1 или S_2.

В этой работе доказывается следующая

Теорема. *Пусть $u(x)$ — гармоническая функция указанного вида в области $D = \{x;\ 0 < r < |x| < R < +\infty\}$. Тогда для любого фиксированного замкнутого множества $F \subset D$ при всех достаточно малых значениях интеграла I_1 выполняется неравенство*

$$|u(x)| < \left(1+\frac{R}{r}\right)\left(3+\frac{1}{\log\frac{R}{r}}\log\frac{BI_2}{AI_1}\right)^{p-2} \times$$

$$\times (AI_1)^{\frac{\log\frac{R}{\rho}}{\log\frac{R}{r}}}(BI_2)^{\frac{\log\frac{\rho}{r}}{\log\frac{R}{r}}},\quad x\in F, \tag{3}$$

где интегралы I_1, I_2 определены в (2), $A = A(x)$, $B = B(x)$ — некоторые положительные функции, зависящие только от $|x| = \rho$ (и, конечно, от параметров r, R кольца D).

Доказательство. Идея доказательства навеяна методом вывода полюсов М. В. Келдыша и С. Н. Мергеляна [1,2]. Ради краткости мы рассмотрим подробно только случай $p = 3$, принимая обозначения сферических координат $x = (\rho, \theta, \varphi)$, $y = (\rho', \theta', \varphi')$.

Пусть выбрано замкнутое множество $F \subset D$ и фиксирована точка $x \in F$. Для всех точек y таких, что $|y| > |x|$, справедливо разложение

$$\frac{1}{|x-y|} = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(\cos\gamma)\frac{|x|^j}{|y|^{j+1}},\quad |y| > |x|, \tag{4}$$

где $P_j(\cos\gamma)$ — полином Лежандра степени j от $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

Фиксируем пока произвольно целое число $n \geqslant 0$ и рассмотрим функцию

$$K(x, y) = \frac{1}{|x-y|} - \sum_{j=0}^{n} P_j(\cos\gamma)\frac{|x|^j}{|y|^{j+1}}. \tag{5}$$

Согласно (4), для всех y таких, что $|y| > |x|$, эта функция представима рядом

$$K(x, y) = \sum_{j=n+1}^{\infty} P_j(\cos\gamma)\frac{|x|^j}{|y|^{j+1}},\quad |y| > |x|. \tag{6}$$

Для дальнейшего нужно оценить величину $|K(x, y)| + \left|\frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y}\right|$ на сферах $S_1 = \{y;\ |y| = r\}$ и $S_2 = \{y;\ |y| = R\}$. На S_2, пользуясь известной оценкой $|P_j(\cos\gamma)| \leqslant 1$, из выражения (6) получаем

$$\max_{|y|=R}\left\{|K(x, y)| + \left|\frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y}\right|\right\} <$$

$$< \sum_{j=n+1}^{\infty}\left\{\frac{\rho^j}{R^{j+1}} + (j+1)\frac{\rho^j}{R^{j+2}}\right\} < B(n+2)e^{-\beta n}, \tag{7}$$

где

$$\beta = \log\frac{R}{\rho} > 0,$$

$$B = B(x) = \frac{\rho}{R(R-\rho)}\left(1 + \frac{1}{R-\rho}\right) > 0. \tag{8}$$

На S_1, пользуясь представлением (5), находим, принимая во внимание, что $\left|\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x-y|}\right| \leqslant \frac{1}{|x-y|^2}$,

$$\max_{|y|=r}\left\{|K(x, y)| + \left|\frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y}\right|\right\} <$$

$$< \frac{1}{\rho - r} + \frac{1}{(\rho - r)^2} + \sum_{j=0}^{n}\left\{\frac{\rho^j}{r^{j+1}} + (j+1)\frac{\rho^j}{r^{j+2}}\right\} <$$

$$< A(n+2)e^{\alpha n}, \tag{9}$$

где

$$\alpha = \log\frac{\rho}{r} > 0,$$

$$A = A(x) = \frac{1}{\rho - r}\left[1 + \frac{1}{\rho - r} + \frac{\rho}{r} + \frac{\rho^2}{r^2(\rho - 2)}\right] > 0. \tag{10}$$

Функция $K(x, y)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в области D и непрерывна вместе с первыми производными (по y) на S_1 и S_2. Поэтому для гармонической функции $u(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, справедлива формула Грина

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_{S_1} + \int_{S_2}\right\}\left[K(x, y)\frac{\partial u(y)}{\partial n_y} - u(y)\frac{\partial K(x, y)}{\partial n_y}\right]dS, \tag{11}$$

где $\partial/\partial n_y$ обозначает дифференцирование по направлению внешней относительно D нормали к $S = S_1 + S_2$ в точке $y \in S$.

Из формулы (11), принимая во внимание оценки (7) и (9), получаем

$$|u(x)| < A(n+2)e^{\alpha n} I_1 + B(n+2)e^{-\beta n} I_2. \tag{12}$$

Неравенство (12) справедливо при любом целом $n \geqslant 0$, и, как легко видеть, его правая часть достигает минимума при некотором конечном n. Не отыскивая этого минимизирующего значения, заменим в правой части (12) дискретное n на непрерывное переменное λ и примем для λ значение

$$\lambda = \frac{1}{\alpha + \beta}\log\frac{BI_2}{AI_1},$$

при котором оба слагаемых в правой части (12) равны. При этом потребуем, чтобы интеграл I_1 для всех точек $x \in F$ удовлетворял неравенству $AI_1 \leqslant BI_2$ [см. формулы (8) и (10)]. Из вида функций $A(x)$ и $B(x)$ ясно, что это условие выполнимо для любого замкнутого множества $F \subset D$.

Теперь число $n > 0$ определяем из условия $n = [\lambda] + 1$, где $[\lambda]$— целая часть λ, т. е.

$$\frac{1}{\alpha+\beta}\log\frac{BI_2}{AI_1} < n \leqslant \frac{1}{\alpha+\beta}\log\frac{BI_2}{AI_1} + 1. \tag{13}$$

Подставляя это значение n в (12) и учитывая неравенства (13), находим

$$|u(x)| < \left(1+\frac{\rho}{r}\right)\left(3+\frac{1}{\alpha+\beta}\log\frac{BI_2}{AI_1}\right) \times$$

$$\times (AI_1)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} (BI_2)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}, \quad x \in F. \tag{14}$$

Так как $\alpha+\beta = \log\frac{R}{r}$, из (14) получаем неравенство (3) при $p = 3$. Теорема доказана для этого случая.

При $p = 2$ или $p > 3$ рассуждаем по той же схеме, но вместо полиномов Лежандра в разложениях вида (5)—(7) будут фигурировать ультрасферические полиномы $P_l^{\left(\frac{p-2}{2}\right)}(\cos\gamma)$. Применяя известные оценки для этих полиномов, докажем теорему в общем случае.

З а м е ч а н и е. Если $I_2 < I_1$, то рассуждение по той же схеме проводится с применением разложений в области $|y| < |x|$. Получается оценка (3), но функции $A(x)$ и $B(x)$ несколько изменятся.

Московский ордена Ленина
энергетический институт

Ե. Դ. ՍՈԼՈՄԵՆՑԵՎ

Երեք գնդային մակերևույթների թեորեմը հարմոնիկ ֆունկցիաների համար

Դիցուք $x = (x^1, \ldots x^p)$*-ն էվկլիդյան* E^p *տարածության կետ է,* $p > 2$, $|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2}$*. Դիցուք* $u(x)$*-ը հարմոնիկ է* $D = \{x;\ r < |x| < R\}$ *տիրույթում և իր առաջին կարգի ածանցյալի հետ միասին անընդհատ է* $\bar{D}$ *փակ տիրույթում: Նշանակենք*

$$I_1 = \frac{1}{\omega_p}\int\limits_{S_1}\left[|u(y)| + \left|\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right|\right] dS_1, \quad I_2 = \frac{1}{\omega_p}\int\limits_{S_2}\left[|u(y)| + \left|\frac{\partial u(y)}{\partial n_y}\right|\right] dS_2.$$

որտեղ $S_1 = \{x;\ |x| = r\}$ *և* $S_2 = \{x;\ |x| = R\}$*-ը եզրային գնդային մակերևույթներն են,* ω_p*-ն միավոր գնդային մակերևույթի մակերեսն է* E^p*-ում,* $\partial/\partial n_y$*-ը* S_1*-ի կամ* S_2*-ի նորմալի ուղղությամբ վերցրած ածանցյալն է:*

Այս աշխատանքում ապացուցվում է

Թեորեմ— դիցուք $u(x)$-ը նշված տիպի հարմոնիկ ֆունկցիա է D-ում: Այդ դեպքում ցանկացած ֆիքս փակ $F\subset D$ բազմության համար I_1 ինտեգրալի բավականաչափ փոքր արժեքների դեպքում բավարարվում է հետևյալ անհավասարությունը

$$|u(x)|<\left(1+\frac{R}{r}\right)\left(3+\frac{1}{\log\frac{R}{r}}\log\frac{BI_2}{AI_1}\right)^{p-2}\times$$

$$\times(AI_1)^{\frac{\log\frac{R}{\rho}}{\log\frac{R}{r}}}(BI_2)^{\frac{\log\frac{\rho}{r}}{\log\frac{R}{r}}},\ x\in F$$

որտեղ $A=A(x)$ և $B=B(x)$ հայտնի դրական ֆունկցիաներ են, կախված միայն $|x|=\rho$-ից:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Н. Мергелян*. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа, Успехи матем. наук, 11, № 5 (71), 3—26, 1956.
[2] *С. Н. Мергелян*. О полноте систем аналитических функций, Успехи матем, наук, 8, № 4 (56), 3—63, 1953.