ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLII 1966 5

МАТЕМАТИКА

И. С. Иохвидов

Вещественные последовательности класса P_1

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/XI 1965)

1. Последовательность комплексных чисел $\{c_p\}_0^\infty$ $(c = \bar{c}_0)$ называется последовательностью *класса* $P_\varkappa$ (целое $\varkappa \geqslant 0$), если для всех достаточно больших n $(n > N)$ теплицева форма

$$\sum_{p,\, q = 0}^{n-1} c_{p-q} \xi_p \bar{\xi}_q \quad (c_{-p} = \bar{c}_p,\ p = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$$

имеет в своем каноническом представлении точно $\varkappa$ положительных квадратов. При $\varkappa = 0$ получаем хорошо изученный в классической теории тригонометрической проблемы моментов класс P_0 *непозитивных последовательностей*. Класс P_1 впервые был введен и рассмотрен М. Г. Крейном, а класс $P_\varkappa$ $(\varkappa \geqslant 1)$ — М. Г. Крейном и автором (см. гл. V их совместной монографии ([1]); там же — подробные библиографические указания).

В § 24 работы ([1]) отдельно исследовались в е щ е с т в е н н ы е последовательности $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1, для которых там были указаны следующие (исключающие друг друга) интегральные представления:

$$\text{(I)}\quad c_p = a \operatorname{ch} p\varsigma - \int_0^\pi \cos pt\, d\sigma_{\text{г}}(t) \quad (p = 0,\ 1,\ 2, \cdots),$$

$$\text{(II)}\quad c_p = \quad \rho \quad - \int_0^\pi \cos pt\, d\sigma_{\text{э}}(t) \quad (p = 0,\ 1,\ 2, \cdots),$$

$$\text{(III)}\quad c_p = c_0 + \mu p^2 + \int_{+0}^\pi \frac{\sin^2 \frac{pt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, d\sigma_{\text{п}}(t) \quad (p = 0,\ 1,\ 2, \cdots),$$

где $a = \bar{a} \neq 0$, $\varsigma > 0$, $\rho > 0$, $\mu = \sigma_n(+0) - \sigma(0) \geqslant 0$, а $\sigma_{\text{г}}(t)$, $\sigma_{\text{э}}(t)$, $\sigma_n(t)$ — неубывающие функции $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, причем

$$\sigma_{\text{э}}(0) = \sigma_{\text{э}}(+0), \quad \int_0^\pi \frac{d\sigma_{\text{п}}(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \infty. \tag{1}$$

Представление (I) называется *гиперболическим*, (II) — *эллиптическим*, а (III) — *параболическим*. Каждое из них (при фиксированной нормировке спектральных функций $\sigma_r(t)$, $\sigma_e(t)$ и $\sigma_n(t)$) определяется единственным образом своими „моментами“ $\{c_p\}_0^\infty$.

Однако, как уже указывалось в ([2]), эти представления не охватывают всего класса P_1. Например, последовательность $c_p = (-1)^p$ ($p = 0, 1, 2, \cdots$), как легко видеть, принадлежит классу P_1 и в то же время не допускает ни одного из представлений (I) — (III). Объясняется этот факт тем, что наряду с каждой последовательностью $\{c_p\}_0^\infty$ из класса P_1 (и вообще из класса P_x) этому классу принадлежит и последовательность $\{(-1)^p c_p\}_0^\infty$. В самом деле, переход от первой из них ко второй равносилен тому, что в каждой теплицевой форме $\sum\limits_{p,q=0}^{n-1} c_{p-q}\xi_p\bar{\xi}_q$ произведено диагональное преобразование переменных $\eta_p = (-1)^p\xi_p$ ($p = 0, 1, \cdots, n-1$), не изменяющее ни ранга, ни сигнатуры этой формы.

Таким образом, каждой из последовательностей $\{c_p\}_0^\infty$ вида (I) — (III) отвечает последовательность $\{(-1)^p c_p\}_0^\infty \in P_1$. Представления (Ia)—(IIIa), отличающиеся от (I) — (III) (соответственно) только множителем $(-1)^p$, назовем *альтернирующими*, сохранив и для них наименования *гиперболического* (Ia), *эллиптического* (IIa) и *параболического* (IIIa). Представления же (I)—(III) назовем *неальтернирующими*. Важным является то обстоятельство, что *представлениями* (I)—(III) *и* (Ia) — (IIIa) *теперь уже исчерпываются все вещественные последовательности класса* P_1 (([2]), теорема 5.11).

2. В работе ([1]) были указаны критерии того, когда последовательность $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1 допускает гиперболическое, эллиптическое или параболическое представления. Эти критерии в ([2]) уточнены с учетом возможности также альтернирующих представлений (Ia)—(IIIa). С такой возможностью связана и вновь возникшая задача о различении (по алгебраическим свойствам и асимптотике) вещественных последовательностей класса P_1, допускающих неальтернирующие и альтернирующие представления. Этот вопрос в ([2]) частично затрагивается лишь в теореме 5.13, из которой следует, что *эллиптическое и параболическое представления последовательности* $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$ *будут неальтернирующими* ((II) *и* (III)) *или альтернирующими* ((IIa) *и* (IIIa)) *в зависимости от того, будут ли неотрицательными при всех* $n = 1, 2, \cdots$ *формы*

$$\sum_{p,q=0}^{n-1} (c_p + c_q - c_{p-q} - c_0)\,\xi_p\bar{\xi}_q \quad \text{или} \quad \sum_{p,q=0}^{n-1} [(-1)^p c_p + (-1)^q c_q - (-1)^{p-q} c_{p-q} - c_0]\,\xi_p\bar{\xi}_q$$

соответственно.

В дополнение к этому критерию полезно еще заметить, что *в случае параболических представлений* (III) *или* (IIIa) *постоянная* μ *вычисляется по формулам*

$$\mu = \lim_{p\to\infty} (c_p/p^2) \text{ или } \mu = \lim_{p\to\infty} [(-1)^p c_p/p^2]$$

соответственно (см. ([1]), стр. 475).

3. Приведем теперь некоторые другие критерии, позволяющие различать случаи существования неальтернирующих или альтернирующих представлений:

Теорема 1. *Пусть* $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$. *Если* $L = \lim_{p\to\infty} (|c_p|/p^2) = \infty$, *т. е.* (*см.* ([2])) *последовательность* $\{c_p\}_0^\infty$ *имеет гиперболическое представление* (I) *или* (Ia), *то постоянная* ζ *вычисляется по формуле* (см. ([1])):

$$\zeta = \lim_{p\to\infty} (\ln |c_p|/p) > 0 \quad (|c_p| > 0 \text{ при } p > N_1).$$

При этом представление последовательности $\{c_p\}_0^\infty$ *будет неальтернирующим* (I) *или альтернирующим* (Ia) *в зависимости от того, существует или не существует предел* $\lim_{p\to\infty} (e^{-p\zeta} c_p)$ *соответственно.* В первом случае постоянная a из *представления* (I) *вычисляется по формуле*

$$a = 2\lim_{p\to\infty} (e^{-p\zeta} c_p) \neq 0,$$

а во втором (в представлении (Ia)*):*

$$a = 2 \lim_{p\to\infty} [e^{-p\zeta} (-1)^p c_p] \neq 0.$$

Теорема 2. *Неограниченная последовательность* $\{c_p\}_0^\infty$ *класса* P_1 *при достаточно больших* p *либо сохраняет знак, либо является знакочередующей. В первом случае ее представление является неальтернирующим** ((I) *или* (III)), *а во втором — альтернирующим* ((Ia) *или* (IIIa)).

Доказательства теорем 1 и 2 получаются прямым рассмотрением формул (I), (III) и (Ia), (IIIa) с применением леммы 5.3 из ([1]).

Теорема 3. *Для того чтобы ограниченная вещественная последовательность* $\{c_p\}_0^\infty$ *класса* P_1 *допускала неальтернирующее эллиптическое представление* (II), *необходимо, чтобы* $c_p \geqslant c_0$ ($p = 0, 1, 2, \cdots$), *а при* $c_0 \geqslant 0$ *достаточно, чтобы* $c_1 \geqslant c_0$.

Достаточно также (при любом c_0*), чтобы хоть для одного* k ($k = 0, 1, 2, \cdots$): $c_{2k+1} > -c_0$.

Замечание 1. *Условие* $c_0 \geqslant 0$ *не является необходимым для существования неальтернирующего представления* (II). Это видно хотя бы из примера

* Из этого факта, между прочим, вытекает полная обоснованность формулы (26.6) в работе ([1]).

$$c_p = 1-2\cos p\pi \quad (p=0,\ 1,\ 2,\cdots):\ -1,\ 3,-1,\ 3,\cdots. \tag{2}$$

Однако требование $c_0 \geqslant 0$ существенно для достаточности условия $c_1 \geqslant c_0$. В самом деле, рассмотрим, например, последовательность

$$\{c_p\}_0^\infty:-1,-1,\ 3,-1,-1,-1,\ 3,-1,-1,-1,-3,\cdots. \tag{3}$$

Здесь $c_1 = c_0\ (<0)$. Применяя критерий из п. 2, уже при $n=3$ убеждаемся, что форма

$$\sum_{p,\,q=0}^{2} (c_p + c_q - c_{p-q} - c_0)\,\xi_p\,\xi_q = 8\,(\xi_1\xi_2 + \xi_2^2)$$

оказывается индефинитной, т. е. последовательность (3) не допускает представления (II). В действительности для нее имеет место альтернирующее представление вида (IIa):

$$c_p = (-1)^p\left(1-2\cos p\,\frac{\pi}{2}\right) \quad (p=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{4}$$

Заметим также, что в данном случае выполняется и *условие*

$$c_p \geqslant c_0 \quad (p=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

которое, таким образом, *оказывается только необходимым* (см. теорему 3), *но не достаточным для существования представления* (IIa).

С другой стороны, отбросив в формуле (4) множитель $(-1)^p$, получаем последовательность с неальтернирующим эллиптическим представлением:

$$c_p = 1-2\cos p\,\frac{\pi}{2} \quad (p=0,\ 1,\ 2,\cdots):-1,\ 1,\ 3,\ 1,-1,1,\ 3,\ 1,-1,\ 1,\ 3,\cdots,$$

для которой при любом $k=0,\ 1,\ 2,\cdots$ имеем $c_{2k+1} = 1 = -c_0$. Следовательно, *достаточное условие, указанное в последней части теоремы 3, не является необходимым.*

4. Полученная с помощью представлений (I)—(III) и (Ia)—(IIIa) классификация вещественных последовательностей $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$ на „эллиптические“, „параболические“ и „гиперболические“ может быть распространена и на комплексные последовательности $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$, а именно: все ограниченные последовательности из P_1 назовем *эллиптическими;* при $L \equiv \lim\limits_{p\to\infty} (|c_p|/p^2) < \infty$ назовем неограниченную последовательность $\{c_p\}_0^\infty\ (\in P_1)$ *параболической*, а при $L=\infty$ — *гиперболической*. То, что этим исчерпаны все возможные случаи, легко проверить с помощью формул (20.14), (20.15) и леммы 5.3′ из ([1]).

Приведенная классификация представляет интерес в связи с проблемой продолжения конечных последовательностей $\{c_p\}_0^{n-1}$ *класса* $P_{1;n}$, т. е. таких, для которых форма

$$\sum_{p,\,q=0}^{n-1} c_{p-q}\,\xi_p\,\bar{\xi}_q \quad (c_{-p} = \bar{c}_p;\ p=0,\ 1,\cdots,\ n-1) \tag{5}$$

имеет точно один положительный квадрат, до бесконечных последовательностей $\{c_p\}_0^\infty \in P_1$.

Для вещественных последовательностей уже в (1) (ср. (2) были обнаружены случаи, когда, несмотря на существование у последовательности $\{c_p\}_0^{n-1} \in P_{1;n}$ бесконечного множества различных вещественных продолжений $\{c_p\}_0^\infty$ класса P_1*, некоторые типы продолжений (например, гиперболический или эллиптический и параболический) оказывались „запрещенными".

Для комплексных продолжений вещественных и комплексных последовательностей класса $P_{1;n}$ эта проблема еще мало изучена. То, что положение здесь, вообще говоря, иное, чем в случаях, упомянутых выше, показывает, например, установленная для случая $n=2$

Теорема 4. *Если теплицева эрмитова форма*

$$\sum_{p,q=0}^{1} c_{p-q}\,\xi_p\bar{\xi}_q = c_0|\xi_0|^2 + 2\mathrm{Re}\,(\bar{c}_1\xi_0\bar{\xi}_1) + c_0|\xi_1|^2$$

*невырождена и имеет один положительный квадрат, то последовательность $\{c_p\}_0^1$ допускает бесконечные продолжения $\{c_g\}_0^\infty \in P_1$ всех трех типов. Более того, даже среди тех только продолжений, для которых ранг всех форм $\sum_{p,q=0}^{n-1} c_{p-q}\,\xi_p\bar{\xi}_q$ $(n=2, 3,\cdots)$ остается равным двум**, имеется бесконечное множество как эллиптических, так и гиперболических продолжений, и два различных параболических продолжения.*

Затронутая в настоящем пункте проблематика (и, в частности, теорема 4) имеет интересный теоретико-операторный аспект, на чем мы остановимся в другом месте.

Одесский инженерно-строительный институт

---

* Это имеет место тогда и только тогда, когда форма (5) невырождена ((1). (2)).

** Они существуют в силу теоремы 5.10 из (1).

Ի. Ս. ԻՈԽՎԻԴՈՎ

P_1-դասի իրական հաջորդականությունները

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են P_1-դասի հաջորդականություններ $\{c_p\}_0^\infty$ այսինքն այնպիսի հաջորդականություններ, որոնց համար բոլոր էրմիտյան ձևերը

$$\sum_{p,q=1}^{n-1} c_{p-q}\,\xi_p\bar{\xi}_q \qquad \underline{c}_p = c_p; \quad (p=0, 1, \ldots, n-1 \quad n=1, 2\ldots)$$

բավականին մեծ n-երի դեպքում ունեն ճիշտ մեկ դրական քառակուսի։ Դասի իրական հաջորդականությունների համար կ. 2—3 տրված են չհերթագայող (неальтернирующее) *((I)—(III)) և հերթագայող* (альтернирующее) *((I_a)—(III_a)) ինտեգրալ ներկայացումների գոյության թեորեմներ* (критерий) *(1—3)։*

Վերջին 4-րդ կետում դրվում է վերջավոր $\{c_p\}_0^{n-1}$ (իրական կամ կոմպլեքս) հաջորդականությունների տարբեր տիպերի կոմպլեքս շարունակման խնդիրները: $n=2$ դեպքի համար ապացուցվում է հետևյալ թեորեմ 4. $\{c_p\}_0^1$ հաջորդականությունը, որին համապատասխանում է չվերածված $c_0|\xi_0|^2 + 2Re(c_1\xi_0\bar{\xi}_1)$ (անորոշ) ձևը թույլ է տալիս գոյություն ունեցող բոլոր տիպերի անվերջ շարունակումներ $\{c_p\}_0^\infty$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн*, Труды Моск. матем. общ., 8 (1959). 413–496.

[2] *И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн*, Труды Моск. матем. общ., 13 (1966).