ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLII 1966 5

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

Теорема о равносуммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям одномерной системы Дирака

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 20/X 1965)

1. В релятивистской квантовой теории стационарная система Дирака имеет вид ([1])

$$\left.\begin{aligned}
&(W-V+mc^2)\,X_1-ic\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)X_4-ic\frac{\partial X_3}{\partial z}=0\\
&(W-V+mc^2)\,X_2-ic\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)X_3+ic\frac{\partial X_4}{\partial z}=0,\\
&(W-V-mc^2)\,X_3-ic\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)X_2-ic\frac{\partial X_1}{\partial z}=0,\\
&(W-V-mc^2)\,X_4-ic\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)X_1+ic\frac{\partial X_2}{\partial z}=0,
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где $V=V(x, y, z)$ — потенциальная функция, c — скорость света, W — энергия, а m — масса частицы. Если $X_1(x, y, z)=X_4(x, y, z)\equiv 0$, а функции $V(x, y, z)$, $X_2(x, y, z)$ и $X_3(x, y, z)$ не зависят от x и z, то система (1) примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\{W-V(y)+mc^2\}\,X_2+cX_3'=0,\\
&\{W-V(y)-mc^2\}\,X_3-cX_2'=0.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Пусть единицы измерения выбраны так, что скорость света $c=1$. Если положим $W=\lambda$, $X_3(y)\sim y_1(x)$, $X_2(y)\sim y_2(x)$, $V(y)+m\sim p(x)$ и $V(y)-m\sim r(x)$, то систему (2) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_2}{dx}+p(x)\,y_1=\lambda y_1,\\
&-\frac{dy_1}{dx}+r(x)\,y_2=\lambda y_2.
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Присоединим к системе (3) граничное условие

$$y_2(0)-hy_1(0)=0,$$

где h — произвольное вещественное число.

В работе ([2]) мы изучали вопросы разложения по собственным функциям задачи (3)—(4) вектор-функций с интегрируемым квадратом на полупрямой $(0, \infty)$ и пришли к окончательным результатам, а именно, было доказано, что равномерно в каждом конечном интервале полупрямой $(0, \infty)$ разность между разложением произвольной вектор-функции $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ с интегрируемым квадратом на $(0, \infty)$, т. е.

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\}\, dx = 0,$$

в обобщенный интеграл Фурье по собственным функциям задачи (3)—(4) и разложением в обычный интеграл Фурье стремится к нулю. Эта теорема дает окончательное решение вопроса о сходимости разложения по собственным функциям одномерного оператора Дирака для двухкомпонентных вектор-функций класса $L^2(0, \infty)$.

В настоящей работе, используя методы, аналогичные методам, разработанным Б. М. Левитаном ([3]) и В. А. Марченко ([4]) для уравнения Шредингера, мы изучаем вопросы сходимости почленно дифференцированных разложений по собственным функциям одномерного оператора Дирака, т. е. задачи (3)—(4).

2. Обозначим через $\varphi(x, \lambda) = \{\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda)\}$ решение системы (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_1(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_2(0, \lambda) = h. \tag{4}$$

Очевидно, что вектор-функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет условию (4).

В работе ([5]) Е. Ч. Титчмарш доказал, что при данном h каждой граничной задаче (3)—(4) соответствует единственная (единственность доказана Б. М. Левитаном) неубывающая, ограниченная в каждом конечном интервале, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, $(-\infty < \lambda < \infty)$, порождающая взаимно обратные изометрические отображения пространства $L^2(0, \infty)$ на $L^2_{\{\rho(\lambda)\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2_{\{\rho(\lambda)\}}(-\infty, \infty)$ на $L^2(0, \infty)$, соответственно, по формулам

$$F(\lambda) = \int_0^\infty \{f_1(x)\, \varphi_1(x, \lambda) + f_2(x)\, \varphi_2(x, \lambda)\}\, dx, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, \varphi_1(x, \lambda)\, d\rho(\lambda), \\ f_2(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, \varphi_2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda), \end{aligned}\right| \tag{6}$$

где интегралы (5) и (6) сходятся в метриках пространств $L^2_{\{F(\lambda)\}}(-\infty, \infty)$ и $L^2(0, \infty)$, соответственно, и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \{f_1^2(x) + f_2^2(x)\}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\rho(\lambda)$$

Положим

$$\Theta_{ij}(x, s; \lambda) = \begin{cases} \int\limits_0^{\lambda} \varphi_i(x, \lambda)\, \varphi_j(s, \lambda)\, d\rho(\lambda), & \lambda > 0, \\ -\int\limits_{-\lambda}^{0} \varphi_i(x, \lambda)\, \varphi_j(s, \lambda)\, d\rho(\lambda) & \lambda < 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2)$$

Матрица $\Theta(x, s; \lambda) = \|\Theta_{ij}(x, s; \lambda)\|$ называется *спектральной матрицей* граничной задачи (3)—(4).

Пусть $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \subset L^2(0, \infty)$.

Введем обозначения

$$S_1(x, \lambda) = \int\limits_0^{\infty} \{f_1(s)\, \Theta_{11}(x, s; \lambda) + f_2(s)\Theta_{12}(x, s; \lambda)\}\, ds, \tag{7}$$

$$S_2(x, \lambda) = \int\limits_0^{\infty} \{f_1(s)\, \Theta_{21}(x, s; \lambda) + f_2(s)\, \Theta_{22}(x, s; \lambda)\}\, ds. \tag{8}$$

В силу определения функций $\Theta_{ij}(x, s; \lambda)$, $i, j = 1, 2$ и равенства (5) для функций $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ получим выражения

$$S_1(x, \lambda) = \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} F(\lambda)\, \varphi_1(x, \lambda)\, d\rho(\lambda),$$

$$S_2(x, \lambda) = \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} F(\lambda)\, \varphi_2(x, \lambda)\, d\rho(\lambda).$$

Функции $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$ являются *отрезками разложения* соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (см. формулы (6)) в интеграле Фурье по собственным функциям задачи (3)—(4).

Рассмотрим задачу (3)—(4) при $p(x) = r(x) \equiv 0$ и $h = 0$. Тогда $\varphi_1(x, \lambda) = \cos \lambda x$, $\varphi_2(x, \lambda) = \sin \lambda x$. Поэтому в этом случае спектральная матрица, которую мы обозначим через $\Theta^*(x, s; \lambda) = \|\Theta^*_{ij}(x, s; \lambda)\|$, определяется по формулам

$$\Theta^*_{11}(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\lambda} \cos \mu x \cdot \cos \mu s\, d\mu,$$

$$\Theta^*_{12}(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\lambda} \cos \mu x \cdot \sin \mu s\, d\mu,$$

$$\Theta^*_{21}(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\lambda} \sin \mu x \cdot \cos \mu s\, d\mu,$$

$$\Theta^*_{22}(x, s; \lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda} \sin \mu x \cdot \sin \mu s \, d\mu.$$

Следовательно функции, аналогично формулам (7) и (8),

$$S^*_1(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\,\Theta^*_{11}(x, s; \lambda) + f_2(s)\,\Theta^*_{12}(x, s; \lambda)\}\, ds,$$

$$S^*_2(x, \lambda) = \int_0^{\infty} \{f_1(s)\,\Theta^*_{21}(x, s; \lambda) + f_2(s)\,\Theta^*_{22}(x, s; \lambda)\}\, ds,$$

являются отрезками разложения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в обычный интеграл Фурье по косинусам и синусам.

Используя асимптотические оценки для производных спектральной матрицы $\Theta(x, s; \lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, полученные нами в работе ([6]), на основании определения функций $S_1(x, \lambda)$ и $S_2(x, \lambda)$, т. е. равенств (7) и (8), доказывается следующая

Лемма 1. *Если коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ системы* (3) *имеют суммируемые в каждом конечном интервале первые производные, то при каждом фиксированном x и при $|a| \to \infty$ справедливы асимптотические оценки*

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{\frac{\partial S_i(x, \lambda)}{\partial x}\right\} = \int_a^{a+1} |F(\lambda)| \cdot |\varphi^1_i(x, \lambda)|\, d\rho(\lambda) = o(a), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Асимптотические оценки (9) имеют место равномерно в каждом конечном интервале изменения x.

Из определения спектральной матрицы $\Theta^*(x, s; \lambda) = \|\Theta^*_{ij}(x, s; \lambda)\|$ и функций $S^*_1(x, \lambda)$ и $S^*_2(x, \lambda)$ непосредственно следует

Лемма 2. *При $|a| \to \infty$ равномерно на полупрямой $(0, \infty)$ справедливы асимптотические оценки*

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{\frac{\partial S^*_i(x, \lambda)}{\partial x}\right\} = o(a), \quad i = 1, 2. \tag{10}$$

Оценки, аналогичные оценкам (9) и (10), имеют место и для старших производных, а именно, справедлива

Лемма 3. *Если функции $p(x)$ и $r(x)$ имеют суммируемые в каждом конечном интервале производные до n-го порядка включительно, то при каждом фиксированном x и при $|a| \to \infty$ справедливы асимптотические оценки*

$$\bigvee_a^{a+1} \left\{\frac{\partial^n S_i(x, \lambda)}{\partial x^n}\right\} = \int_a^{a+1} |F(\lambda)| \cdot |\varphi^{(n)}_i(x, \lambda)|\, d\rho(\lambda) = o(a^n), \; i = 1, 2. \tag{11}$$

Оценки (11) *имеют место равномерно в каждом конечном интервале.*

Оценки (9) и (10) позволяют применить тауберову теорему для интегралов Фурье В. А. Марченко ([7]). В результате можно доказать следующую теорему о равносуммируемости дифференцированных разложений по собственным функциям одномерного оператора Дирака и разложений в обычный интеграл Фурье.

Теорема 1. *Пусть* $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \subset L^2(0, \infty)$. *Если функции* $p(x)$ *и* $r(x)$ *имеют суммируемые в каждом конечном интервале первые производные, то равномерно в каждом конечном интервале имеют место равенства*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right) d_\nu \left\{ \frac{\partial S_1(x, \nu)}{\partial x} - \frac{\partial S_2^*(x, \nu)}{\partial x} \right\} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right) d_\nu \left\{ \frac{\partial S_2(x, \nu)}{\partial x} - \frac{\partial S_2^*(x, \nu)}{\partial x} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по Риссу первого порядка производных первого порядка разложения функций $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *по собственным функциям одномерного оператора Дирака и разложения в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.*

Исходя из асимптотических оценок (11) можно доказать аналогичную теорему и для старших производных, а именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \subset L^2(0, \infty)$. *Если функции* $p(x)$ *и* $r(x)$ *имеют суммируемые в каждом конечном интервале производные до порядка* n *включительно, то равномерно в каждом конечном интервале справедливы равенства*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right)^n d_\nu \left\{ \frac{\partial^n S_1(x, \lambda)}{\partial x^n} - \frac{\partial^n S_1^*(x, \lambda)}{\partial x^n} \right\} = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right)^n d_\nu \left\{ \frac{\partial^n S_2(x, \lambda)}{\partial x^n} - \frac{\partial S_2^*(x, \lambda)}{\partial x^n} \right\} = 0,$$

т. е. разность между средними по Риссу порядка n *производных* n*-го порядка разложения функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *по собственным функциям одномерного оператора Дирака и разложения в обычный интеграл Фурье стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.*

Из теоремы 1 легко получить теорему суммирования дифференцированных разложений по собственным функциям одномерного оператора Дирака к значению соответствующих производных разлагаемой функции. Справедлива

Теорема 3. *Пусть функции* $p(x)$ *и* $r(x)$ *имеют суммируемые в каждом конечном интервале первые производные и выполнены следующие условия:*

1. $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\} \subset L^2(0, \infty)$;

2. *В некоторой окрестности точки x_0 функция $f'(x) = \{f_1'(x), f_2'(x)\}$ существует и суммируема.*

3. *В точке x_0 функция $f'(x) = \{f_1'(x), f_2'(x)\}$ непрерывна. Тогда*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right) d_\nu \left. \frac{\partial S_1(x, \nu)}{\partial x} \right|_{x = x_0} = f_1'(x_0),$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{\nu^2}{\lambda^2}\right) d_\nu \left. \frac{\partial S_2(x, \nu)}{\partial x} \right|_{x = x_0} = f_2'(x_0),$$

т. е. первая производная разложения функции $f(x) = \{f_1(x), f_2(x)\}$ по собственным функциям одномерного оператора Дирака в точке суммируема по методу Рисса первого порядка к значению $f'(x_0)$.

Справедлива аналогичная теорема и для старших производных.

Приношу глубокую благодарность Б. М. Левитану за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Բ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Թեորեմ ըստ Դիրակի միաչափ սիստեմի սեփական ֆունկցիաների դիֆերենցված վերլուծությունների հավասարահաճրագումարելիության մասին

Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Աջ կիսաառանցքի վրա քառակուսով հանրագումարելի վեկտոր-ֆունկցիայի ըստ Դիրակի միաչափ սիստեմի սեփական ֆունկցիաների վերլուծության առաջին կարգի ածանցյալների և ըստ Ֆուրյեի սովորական ինտեգրալների վերլուծության առաջին կարգի ածանցյալների տարբերության Ռիսսի առաջին կարգի միջինները հավասարաչափ ձգտում են զերոյի ամեն մի վերջավոր հատվածում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Ф. Мотт* и *И. Н. Снеддон*, Wave mechanics and its application, Oxford, 1948. [2] *И. С. Саргсян*, ДАН СССР (в печати). [3] *Б. М. Левитан*, Известия АН СССР, серия матем., 16 (1952), 325—352. [4] *В. А. Марченко*, Труды Московского мат. общества, т. 1 (1952), 327—420. [5] *Э. Ч. Титчмарш*, Proc. London Math. Soc., (3), 11 (1961) 156—168. [6] *И. С. Саргсян*, ДАН АрмССР, т. 42, № 3 (1966). [7] *В. А. Марченко*, Известия АН СССР, серия матем. 19 (1955), 381—422.