ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLII 1966 5

МАТЕМАТИКА

ПА-6857

В. И. Мацаев и Ю. А. Палант

О распределении спектра полиномиального операторного пучка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 20/IX 1965)

Мы намечаем здесь доказательство теоремы о распределении спектра полиномиальных пучков операторов в гильбертовом пространстве

$$L(\lambda) = I - T_0 - \lambda T_1 H - \cdots - \lambda^{n-1} T_{n-1} H^{n-1} - \lambda^n H^n, \tag{1}$$

$$M(\lambda) = I - T_0 - \lambda H T_1 - \cdots - \lambda^{n-1} H^{n-1} T_{n-1} - \lambda^n H^n, \tag{2}$$

которая близка к известной теореме М. В. Келдыша, опубликованной в ([1]) без доказательства.

1. Всюду в дальнейшем мы будем писать $\psi(u) \asymp \varphi(u)$, если существуют такие положительные u_0, m, M, что $m < \psi(u)/\varphi(u) < M$ при всех $u > u_0$; $\psi(u) \sim \varphi(u)$, если $\lim\limits_{u \to +\infty} \psi(u)/\varphi(u) = 1$. Через c будем обозначать положительные постоянные (возможно, различные).

Будем говорить, что неубывающая неотрицательная функция $\varphi(u)$ $(0 \leqslant u < +\infty)$ *удовлетворяет условию* (A), если существует число a такое, что $\varphi(au) \geqslant 2\varphi(u)$, и условию (T), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех достаточно больших u $\varphi[(1+\delta)u] \leqslant (1+\varepsilon)\varphi(u)$. Отметим, что вместе с функцией $\varphi(u)$ условиям (A) или (T) удовлетворяет любая функция $\psi(u)$ такая, что $\psi(u) \sim \varphi(u)$.

Теорема 1. *Если $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ $(0 \leqslant u < +\infty)$ неубывающие функции, $\varphi(u)$ удовлетворяет условию (T), $\lim\limits_{u \to +\infty} \varphi(u) = +\infty$ и при некотором $m > 0$*

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(u)}{(t+u)^m} \sim \int_0^\infty \frac{d\varphi(u)}{(t+u)^m},$$

то $\psi(u) \sim \varphi(u)$.

Это предложение, обобщающее тауберову теорему М. В Келдыша ([2]), доказывается аналогично теореме Б. И. Коренблюма ([3]).

Лемма 1. *Условие (A) эквивалентно следующему: для каждого $q > 0$ существует $c > 0$ такое, что для всех $s > 0$*

$$\int_0^s u^q\, d\varphi(u) \geqslant c\varphi(s)\, s^q.$$

Лемма 2. *Если $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ — неубывающие функции, $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям (A) и (T) и для некоторых $q>0$ и $m>0$*

$$\int_0^\infty \frac{u^q d\psi(u)}{(t+u)^m} \sim \int_0^\infty \frac{u^q\, d\varphi(u)}{(t+u)^m},$$

то $\psi(u) \sim \varphi(u)$.

Лемма 3. Если $\varphi(u)$ *удовлетворяет условию (T), то при некоторых $\beta>0$, $c>0$ и $u \geqslant t$ $\varphi(u)/\varphi(t) \leqslant c\,(u/t)^\beta$.*

2. Следуя статье ([4]), обозначим через S_p $(p>0)$ класс вполне непрерывных операторов A в гильбертовом пространстве, для которых $|A|_p^p = sp\,(A^*A)^{p/2} < \infty$, через S_∞ класс всех вполне непрерывных операторов, через R — класс ограниченных операторов. Функцией распределения $n(u)$ множества комплексных чисел будем называть количество элементов этого множества, лежащих в круге $|z|<u$.

Теорема 2. *Пусть $A = H(I+S)$, где $S \in S_\infty$, $(I+S)^{-1} \in R$, $H \in S_p$ — нормальный оператор, аннулирующийся только в нуле, со спектром на системе лучей l_i $(i=0, 1, \cdots, n-1)$, исходящих из точки 0. Обозначим через $n_i(u, H)$ функцию распределения характеристических чисел оператора H, лежащих на луче l_i. Пусть Γ_i — контур, состоящий из двух лучей, исходящих из точки 0 и не пересекающих спектра оператора A, и содержащий внутри себя точно один луч l_i; $n_i(u, A)$ — функция распределения характеристических чисел оператора A, попавших внутрь контура Γ_i.*

Если при всех $i = 0, 1, \cdots, n-1$ и некотором j $n_i(u, H) \asymp n_j(u, H)$ и $n_j(u, H)$ удовлетворяет условиям (A) и (T), то $n_j(u, A) \sim n_j(u, H)$.

Наметим основные этапы доказательства.

Не ограничивая общности, можно считать, что $j=0$ и луч l_0 совпадает с положительной полуосью. Чтобы не затруднять изложения, ограничимся случаем простого спектра оператора H.

Рассмотрим оператор-функцию

$$K(\mu, A) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{\lambda^\gamma A_\lambda\, d\lambda}{\lambda-\mu},$$

где $A_\lambda = A(I-\lambda A)^{-1}$ и γ — число, удовлетворяющее условию $0<\gamma<1$, которое будет выбрано позже; μ лежит вне угла Γ_0. Можно показать, что при $m>p$

$$sp\, K^m(\mu, A) = \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda_k^{\gamma m}}{(\lambda_k-\mu)^m},$$

где λ_k — характеристические числа оператора A, лежащие внутри контура Γ_0. Далее, $A_\lambda = H_\lambda(I+C_\lambda)$, где

$$C_\lambda = (I-TR_\lambda)^{-1} - I,\quad T = (I+S)^{-1} - I,\quad R_\lambda = (I-\lambda H)^{-1},\quad H_\lambda = HR_\lambda.$$

По лемме М. В. Келдыша ([1]), $|C_\lambda| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ $(\lambda \in \Gamma_0)$. Введем обозначение

$$S_\mu = K(\mu, A) - K(\mu, H) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\lambda^\gamma H_\lambda C_\lambda d\lambda}{\lambda-\mu}. \tag{3}$$

Пусть $\mu = -s$ $(s>0)$, $|\lambda| = t$. Тогда для нормы в S_m интеграла по одной из сторон угла Γ_0

$$\left|\int\frac{\lambda^\gamma H_\lambda C_\lambda d\lambda}{\lambda-\mu}\right|_m \leqslant C\int\limits_0^\infty\frac{t^\gamma |H_\lambda|_m |C_\lambda|\, dt}{t+s}. \tag{4}$$

Пользуясь леммой 3, получаем

$$|H_\lambda|_m^m \leqslant c\int\limits_0^\infty\frac{dn_0(u,H)}{(u+t)^m} = cm\int\limits_0^\infty\frac{n_0(u,H)\,du}{(u+t)^{m+1}} \leqslant$$

$$\leqslant cmn_0(t,H)\int\limits_0^t\frac{du}{(u+t)^{m+1}} + cn_0(t,H)\int\limits_t^\infty\frac{u^s du}{t^s(u+t)^{m+1}} \leqslant \frac{cn_0(t,H)}{t^m}. \tag{5}$$

Пусть задано $\varepsilon>0$. Выбрав N таким, чтобы $|C_\lambda|<\varepsilon$ при любом λ, лежащем на контуре Γ_0 и удовлетворяющем условию $|\lambda|>N$, разобьем контур на две части Γ_0' и Γ_0'', на одной из которых $|\lambda|\leqslant N$, а на другой $|\lambda|>N$. Тогда

$$|S_\mu|_m \leqslant \left|\int\limits_{\Gamma_0'}\frac{\lambda^\gamma H_\lambda C_\lambda d\lambda}{\mu-\lambda}\right|_m + \left|\int\frac{\lambda^\gamma H_\lambda C_\lambda d\lambda}{\lambda-\mu}\right|_m.$$

Первое слагаемое есть $0(1/s)$, а второе, согласно (5), допускает оценку

$$\left|\int\limits_{\Gamma_0''}\frac{\lambda^\gamma H_\lambda C_\lambda d\lambda}{\lambda-\mu}\right|_m \leqslant c\varepsilon\int\limits_0^\infty\frac{n_0^{1/m}(t,H)\,dt}{t^{1-\gamma}(t+s)} \leqslant$$

$$\leqslant c\varepsilon\left[\frac{1}{s}\int\limits_0^s\frac{n_0^{1/m}(t,H)\,dt}{t^{1-\gamma}} + \int\limits_0^\infty\frac{n_0^{1/m}(t,H)\,dt}{t^{2-\gamma}}\right] \leqslant c\varepsilon\, n_0^{1/m}(s,H)\, s^{\gamma-1}; \tag{7}$$

из оценок (5—7) следует

$$|S_\mu|_m = o\,(n_0^{1/m}(s,H)\, s^{\gamma-1}). \tag{8}$$

Теперь выберем γ таким, чтобы $0<\gamma<1-\beta/m$. Тогда это выражение стремится к нулю при $s\to\infty$.

Пользуясь леммой 1, получаем

$$\int\limits_0^\infty\frac{u^{\gamma m}\,dn_0(u,H)}{(u+s)^m} \geqslant \frac{c}{S^m}\int\limits_0^s u^{\gamma m}\,dn_0(u,H) \geqslant cn_0(s,H)\, s^{m(\gamma-1)},$$

откуда

$$n_0^{1/m}(s,H)\, s^{\gamma-1} = O\,[(spk^m(\mu,H))^{1/m}]. \tag{9}$$

Заметим, что из (3) следует

$$K^m(\mu, A) - K^m(\mu, H) = \Sigma\, K^{\alpha_1}(\mu, H)\, S_\mu^{\beta_1} \cdots K^{\alpha_m}(\mu, H)\, S_\mu^{\beta_m},$$

где суммирование распространяется на все комбинации чисел $\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_m, \beta_m$ принимающих значения 0 или 1, причем $\alpha_1 + \beta_1 = \cdots = \alpha_m + \beta_m = 1$ и комбинация, в которой $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 1$, исключается. Отсюда, пользуясь ([8]), ([9]) и неравенством Гёльдера, получаем, что при $\mu \to -\infty$

$$|sp\, K^m(\mu, A) - sp\, K^m(\mu, H)| \leqslant |K^m(\mu, A) - K^m(\mu, H)|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \Sigma\, |K(\mu, H)|_m^{\alpha_1}\, |S_\mu|_m^{\beta_1} \cdots K(\mu, H)|_m^{\alpha_m}\, |S_\mu|_m^{\beta_m} =$$

$$= o\,[(n_0^{1/m}(s, H)\, s^{\gamma-1})^m] = o\,(sp K^m(\mu, H)).$$

Следовательно, при $\mu \to -\infty$

$$sp\, K^m(\mu, A) \sim sp K^m(\mu, H),$$

т. е. при $s \to +\infty$

$$\int_0^\infty \frac{u^{\gamma m}\, dn_0(u, A)}{(u+s)^m} \sim \int_0^\infty \frac{u^{\gamma m}\, dn_0(u, H)}{(u+s)^m},$$

откуда, согласно лемме 2, $n_0(u, A) \sim n_0(u, H)$.

3. Для полиномиального пучка операторов ([1]), сводя его к линейному ([5, 6]) и пользуясь теоремой 2, мы получили следующее предложение, которое распространяется и на пучки вида (2).

Теорема 3. *Пусть H — положительный оператор, принадлежащий при некотором $p > 0$ классу S_p; $T_j \in S_p$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$. Обозначим через $n(u, H)$ функцию распределения характеристических чисел оператора H и через $n_j(u, L)$, $n_j(u, M)$ — функции распределения характеристических чисел пучков (1) и (2) внутри угла, окружающего луч $\arg \lambda = 2\pi j/n$.*

Если $n(u, H)$ удовлетворяет условиям (A) и (T), то

$$n_j(u, L) \sim n(u, H);\ n_j(u, M) \sim (n, H).$$

Замечания. 1) Условие $H > 0$ можно заменить более слабым: $H = H^*$, $n_-(u, H) = o(n_+(u, H))$, где $n_+(u, H)$ и $n_-(u, H)$ — функции распределения, соответственно, положительных и отрицательных характеристических чисел оператора H.

2) В теореме 3 ограничения на T_j $(j > 0)$ слабее, чем в теореме М. В. Келдыша ([1]), в которой (при наших обозначениях) предполагается, что $H^{j-n} T_j \in R$. Далее, от оператора H в ([1]) требуется, чтобы существовала такая гладкая неубывающая функция $\varphi(u)$ $(0 \leqslant u < +\infty)$, что $\varphi(u) \sim n(u, H)$ и при достаточно больших u

$$\alpha\varphi(u) \leqslant u\varphi'(u) \leqslant \beta\varphi(u) \quad (0 < \beta < \alpha + 1).$$

Из левого неравенства, при дополнительном ограничении $\alpha > 0$, следует, что $\varphi(u)$, а с нею и $n(u, H)$ удовлетворяет условию (A); условие (T) слабее правого неравенства.

4. Рассуждения, подобные примененным в доказательстве теоремы 2, позволили получить следующий результат о распределении спектра пучков, содержащих параметр рациональным образом

$$N(\lambda) = L(\lambda) + G(\lambda), \tag{10}$$

$$P(\lambda) = M(\lambda) + G(\lambda), \tag{11}$$

где $G(\lambda) = \frac{G_1}{\lambda} + \frac{G_2}{\lambda^2} + \cdots + \frac{G_r}{\lambda^r}$.

Теорема 4. *Пусть положительный оператор H и операторы G_j $(j = 1, 2, \cdots, r)$ принадлежат при некотором $p > 0$ классу S_p; операторы $T_j \in S_p$ $(j = 0, 1, \cdots, n-1)$. Обозначим через $n_j(u, N)$ и $n_j(u, P)$ функции распределения характеристических чисел пучков (10) и (11), лежащих внутри угла, окружающего луч $\arg \lambda = 2\pi j/n$ и вне круга $|\lambda| \leqslant 1$. Если $n(u, H)$ удовлетворяет условиям (A) и (7), то*

$$n_j(u, N) \sim n(u, H), \quad n_j(u, P) \sim n(u, H).$$

Возможно, что условие (A) в теоремах 2—4 является лишним.

Физико-технический институт
низких температур
Академии наук Украинской ССР

Харьковский
государственный
университет

Վ. Ի. ՄԱՑԱԵՎ և ՅՈՒ. Ա. ՊԱԼԱՆՏ

Բազմանդամային օպերատոր փնջի սպեկտրի բաշխման մասին

Հիլբերտյան տարածության մեջ դիտարկվում են հետևյալ փնջերը՝

$$N(\lambda) = L(\lambda) + G(\lambda), \qquad P(\lambda) = M(\lambda) + G(\lambda),$$

որտեղ

$$L(\lambda) = I - T_0 - \lambda T_1 H - \ldots - \lambda^{n-1} T_{n-1} H^{n-1} - \lambda^n H^n,$$

$$M(\lambda) = I - T_0 - \lambda H T_1 - \ldots - \lambda^{n-1} H^{n-1} T_{n-1} - \lambda^n H^n,$$

$$G(\lambda) = \frac{G_1}{\lambda} + \frac{G_2}{\lambda^2} + \ldots + \frac{G_r}{\lambda^r}.$$

Նշանակենք $n_j(u, N)$-ով $N(\lambda)$ փնջի այն խարակտերիստիկ թվերի քանակը, որոնք ընկած են $\arg\lambda = \frac{2\pi j}{n}$ ճառագայթի շրջակայքում և $1 < |\lambda| < u$ օղակում։ Դիցուք $n(u, H)$-ը H օպերատորի խարակտերիստիկ թվերի քանակն է $|\lambda| < u$ շրջանում։ Կասենք, որ $\varphi(u)$ $(0 < u < +\infty)$ ոչ բացասական չնվազող ֆունկցիան բավարարում է (A) պայմանին, եթե գոյություն ունի այնպիսի a թիվ, որ $\varphi(au) > 2\varphi(u)$ և կասենք, որ $\varphi(u)$-ն բավարարում է (T) պայմանին, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$-ի համար գոյություն ունի այնպիսի $\delta > 0$, որ բավականաչափ մեծ բոլոր u-երի համար լինի՝ $\varphi((1+\delta)u) < (1+\varepsilon)\varphi(u)$։

Ապացուցվում է, որ եթե H դրական օպերատորը և G_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ օպերատորները ունեն վերջավոր կարգ, իսկ T_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ օպերատորները լիովին անընդհատ են, ապա

$$n_j(u, N) \sim n(u, H), \qquad n_j(u, P) \sim n(u, H).$$

Բնդարկվում է այս թեորեմի կապը Մ. Վ. Կելդիշի հայտնի թեորեմի հետ (տես [1])։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. В. Келдыш*, ДАН, 77, № 1 (1951). [2] *М. В. Келдыш*, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38 (1951). [3] *Б. И. Коренблюм*, ДАН СССР, 88, № 5 (1953). [4] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, ДАН СССР, 137, № 5 (1961). [5] *Ю. А. Палант*, ДАН СССР, 141, № 3 (1961). [6] *В. Н. Визитей, А. С. Маркус*, Матем. сб., 66 (103): 2 (1965).