

Г. П. Геонджян

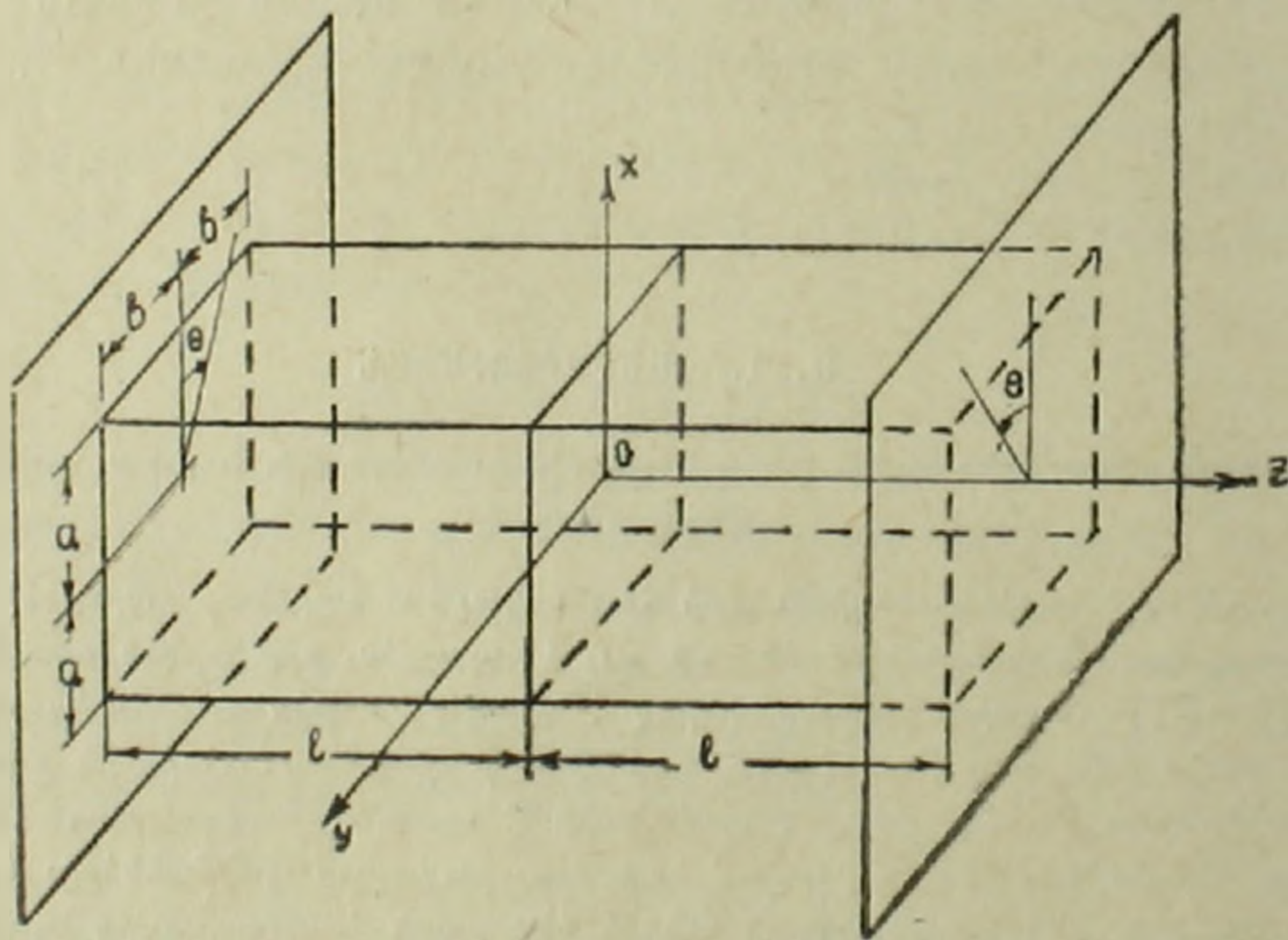
Стесненное кручение параллелепипеда

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 2/XII 1965)

Точному решению смешанной задачи об упругом равновесии параллелепипеда посвящен ряд работ (1-4).

В статье приводится точное решение задачи стесненного кручения прямоугольного параллелепипеда, вызванного взаимным поворотом на угол 2θ двух абсолютно жестких диафрагм, закрепленных на противоположных гранях. Будем считать, что расстояние между диафрагмами не изменяется и остальные грани свободны от внешних нагрузок.

Поместим начало координат в центре параллелепипеда, а оси координат направим параллельно его ребрам, как показано на фиг. 1.



Фиг. 1.

Для рассматриваемой задачи координатные плоскости являются плоскостями антисимметрии, в связи с чем достаточно рассмотреть только первый октант параллелепипеда.

В случае отсутствия объемных сил решение поставленной задачи сводится к интегрированию однородных уравнений Ламе:

$$(1-2\nu) \nabla^2 u + \frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0,$$

$$(1-2\nu) \nabla^2 v + \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$(1-2\nu) \nabla^2 w + \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0,$$

при следующих условиях на поверхности:

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \text{когда } x = 0, \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \text{когда } x = a, \quad (3)$$

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \text{когда } y = 0, \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \text{когда } y = b, \quad (5)$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \sigma_z = 0, \quad \text{когда } z = 0, \quad (6)$$

$$u = -\theta y, \quad v = \theta x, \quad w = 0, \quad \text{когда } z = l. \quad (7)$$

Представим перемещения в виде двойных рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}^{(1)} \cos \lambda_n x \sin \mu_m y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} X_{mk}^{(1)} \sin \mu_m y \sin \gamma_k z + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} Y_{nk}^{(1)} \cos \lambda_n x \sin \gamma_k z, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} v = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}^{(2)} \sin \lambda_n x \cos \mu_m y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} X_{mk}^{(2)} \cos \mu_m y \sin \gamma_k z + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} Y_{nk}^{(2)} \sin \lambda_n x \sin \gamma_k z \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w = & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}^{(3)} \sin \lambda_n x \sin \mu_m y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} X_{mk}^{(3)} \sin \mu_m y \cos \gamma_k z + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} Y_{nk}^{(3)} \sin \lambda_n x \cos \gamma_k z, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{(1)} &= A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} p_{mn} z + D_{mn}^{(1)} p_{mn} z \operatorname{ch} p_{mn} z, \\ Z_{mn}^{(2)} &= A_{mn}^{(2)} \operatorname{sh} p_{mn} z + D_{mn}^{(2)} p_{mn} z \operatorname{ch} p_{mn} z, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Z_{mn}^{(3)} &= B_{mn}^{(3)} \operatorname{ch} p_{mn} z + C_{mn}^{(3)} p_{mn} z \operatorname{sh} p_{mn} z, \\ X_{mk}^{(1)} &= N_{mk}^{(1)} \operatorname{ch} r_{mk} x + Q_{mk}^{(1)} r_{mk} x \operatorname{sh} r_{mk} x, \\ X_{mk}^{(2)} &= M_{mk}^{(2)} \operatorname{sh} r_{mk} x + P_{mk}^{(2)} r_{mk} x \operatorname{ch} r_{mk} x, \\ X_{mk}^{(3)} &= M_{mk}^{(3)} \operatorname{sh} r_{mk} x + P_{mk}^{(3)} r_{mk} x \operatorname{ch} r_{mk} x, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
Y_{nk}^{(1)} &= E_{nk}^{(1)} \operatorname{sh} q_{nk} y + H_{nk}^{(1)} q_{nk} y \operatorname{ch} q_{nk} y, \\
Y_{nk}^{(2)} &= F_{nk}^{(2)} \operatorname{ch} q_{nk} y + G_{nk}^{(2)} q_{nk} y \operatorname{sh} q_{nk} y, \\
Y_{nk}^{(3)} &= E_{nk}^{(3)} \operatorname{sh} q_{nk} y + H_{nk}^{(3)} q_{nk} y \operatorname{ch} q_{nk} y, \\
\lambda_n &= \frac{(2n-1)\pi}{2a}, \quad \mu_m = \frac{(2m-1)\pi}{2b}, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l},
\end{aligned} \tag{13}$$

$$p_{mn}^2 = \mu_m^2 + \lambda_n^2, \quad r_{mk}^2 = \mu_m^2 + \gamma_k^2, \quad q_{nk}^2 = \lambda_n^2 + \gamma_k^2. \tag{14}$$

Удовлетворив уравнениям равновесия (1), получим следующие зависимости между коэффициентами, входящими в (11) — (13):

$$\begin{aligned}
\frac{D_{mn}^{(1)}}{\lambda_n} &= \frac{D_{mn}^{(2)}}{\mu_m} = \frac{C_{mn}^{(3)}}{p_{mn}}, \quad (3-4\nu) p_{mn} C_{mn}^{(3)} - \lambda_n A_{mn}^{(1)} - \mu_m A_{mn}^{(2)} + p_{mn} B_{mn}^{(3)} = 0, \\
\frac{P_{mk}^{(2)}}{\mu_m} &= \frac{P_{mk}^{(3)}}{\gamma_k} = \frac{Q_{mk}^{(1)}}{r_{mk}}, \quad (3-4\nu) r_{mk} Q_{mk}^{(1)} - \mu_m M_{mk}^{(2)} - \gamma_k M_{mk}^{(3)} + r_{mk} N_{mk}^{(1)} = 0, \\
\frac{H_{nk}^{(1)}}{\lambda_n} &= \frac{H_{nk}^{(3)}}{\gamma_k} = \frac{G_{nk}^{(2)}}{q_{nk}}, \quad (3-4\nu) q_{nk} G_{nk}^{(2)} - \lambda_n E_{nk}^{(1)} - \gamma_k E_{nk}^{(3)} + q_{nk} F_{nk}^{(2)} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Удовлетворив условиям на поверхности (2) — (7) и используя (15), для постоянных интегрирования получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
D_{mn}^{(1)} &= \frac{\lambda_n}{p_{mn}} C_{mn}^{(3)}, \quad A_{mn}^{(1)} = -\lambda_n l \operatorname{cth} p_{mn} l C_{mn}^{(3)} - \frac{(-1)^{m+n} 4\theta}{ab \mu_m^2 \lambda_n \operatorname{sh} p_{mn} l}, \\
D_{mn}^{(2)} &= \frac{\mu_m}{p_{mn}} C_{mn}^{(3)}, \quad A_{mn}^{(2)} = -\mu_m l \operatorname{cth} p_{mn} l C_{mn}^{(3)} + \frac{(-1)^{m+n} 4\theta}{ab \mu_m \lambda_n^2 \operatorname{sh} p_{mn} l}, \\
B_{mn}^{(3)} &= -[(3-4\nu) + p_{mn} l \operatorname{cth} p_{mn} l] C_{mn}^{(3)} + \frac{(-1)^{m+n} 4\theta}{p_{mn} ab \operatorname{sh} p_{mn} l} \left(\frac{1}{\lambda_n^2} - \frac{1}{\mu_m^2} \right), \\
P_{mk}^{(2)} &= \frac{\mu_m}{r_{mk}} Q_{mk}^{(1)}, \quad M_{mk}^{(2)} = \frac{\mu_m}{r_{mk}} (1-2\nu - r_{mk} a \operatorname{th} r_{mk} a) Q_{mk}^{(1)}, \\
P_{mk}^{(3)} &= \frac{\gamma_k}{r_{mk}} Q_{mk}^{(1)}, \quad M_{mk}^{(3)} = \frac{\gamma_k}{r_{mk}} (1-2\nu - r_{mk} a \operatorname{th} r_{mk} a) Q_{mk}^{(1)}, \\
N_{mk}^{(1)} &= -[2(1-\nu) + r_{mk} a \operatorname{th} r_{mk} a] Q_{mk}^{(1)}, \\
H_{nk}^{(1)} &= \frac{\lambda_n}{q_{nk}} G_{nk}^{(2)}, \quad E_{nk}^{(1)} = \frac{\lambda_n}{q_{nk}} (1-2\nu - q_{nk} b \operatorname{th} q_{nk} b) G_{nk}^{(2)}, \\
H_{nk}^{(3)} &= \frac{\gamma_k}{q_{nk}} G_{nk}^{(2)}, \quad E_{nk}^{(3)} = \frac{\gamma_k}{q_{nk}} (1-2\nu - q_{nk} b \operatorname{th} q_{nk} b) G_{nk}^{(2)}, \\
F_{nk}^{(2)} &= -[2(1-\nu) + q_{nk} b \operatorname{th} q_{nk} b] G_{nk}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Для определения постоянных интегрирования $C_{mn}^{(3)}$, $G_{nk}^{(2)}$ и $Q_{mk}^{(1)}$ получим следующую совокупность трех бесконечных систем линейных уравнений:

$$C_{mn}^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_{mnk} G_{nk}^* + \sum_{k=1}^{\infty} b_{mnk} Q_{mk}^* + c_{mn}$$

$$G_{nk}^* = \sum_{m=1}^{\infty} d_{nkm} C_{mn}^* + \sum_{m=1}^{\infty} e_{nkm} Q_{mk}^* + f_{nk} \quad (17)$$

$$Q_{mk}^* = \sum_{n=1}^{\infty} g_{mkn} C_{mn}^* + \sum_{n=1}^{\infty} h_{mkn} Q_{nk}^* + \varphi_{mk}$$

(m, n, k = 1, 2, 3, ...)

$$C_{mn}^* = \frac{(-1)^{m+n} p_{mn} \operatorname{sh} p_{mn} l}{a} C_{mn}^{(3)}$$

$$G_{nk}^* = \frac{(-1)^{k+n} \gamma_k l \operatorname{ch} q_{nk} b}{b} G_{nk}^{(2)}, \quad (18)$$

$$Q_{mk}^* = \frac{(-1)^{k+m} \gamma_k l \operatorname{ch} r_{mk} a}{a} Q_{mk}^{(1)},$$

$$a_{mnk} = \frac{4 p_{nm} \operatorname{sh}^2 p_{mn} l [\nu (\gamma_k^2 + \mu_n^2) - (1 - \nu) \mu_m^2]}{a l |p_{mn} l + (3 - 4\nu) \operatorname{sh} p_{mn} l \operatorname{ch} p_{mn} l| (\gamma_k^2 + p_{mn}^2)^2},$$

$$b_{mnk} = \frac{4 p_{mn} \operatorname{sh}^2 p_{mn} l [\nu (\gamma_k^2 + \mu_m^2) - (1 - \nu) \mu_n^2]}{a l |p_{mn} l + (3 - 4\nu) \operatorname{sh} p_{mn} l \operatorname{ch} p_{mn} l| (\gamma_k^2 + p_{mn}^2)^2},$$

$$c_{mn} = \frac{4 \theta \operatorname{sh} p_{mn} l \operatorname{ch} p_{mn} l}{a a b |p_{mn} l + (3 - 4\nu) \operatorname{sh} p_{mn} l \operatorname{ch} p_{mn} l|} \left(\frac{1}{\mu_n^2} - \frac{1}{\mu_m^2} \right),$$

$$d_{nkm} = \frac{4 a \gamma_k^2 \operatorname{ch}^2 q_{nk} b [(1 - \nu) \mu_m^2 - \nu (\gamma_k^2 + \mu_n^2)]}{q_{nk} b (\operatorname{sh} q_{nk} b \operatorname{ch} q_{nk} b - q_{nk} b) (\mu_m^2 + q_{nk}^2)^2}, \quad (19)$$

$$e_{nkm} = - \frac{4 \operatorname{ch}^2 q_{nk} b [\mu_n^2 \mu_m^2 + \nu \gamma_k^2 (\mu_m^2 + q_{nk}^2)]}{q_{nk} b (\operatorname{sh} q_{nk} b \operatorname{ch} q_{nk} b - q_{nk} b) (\mu_m^2 + q_{nk}^2)^2},$$

$$f_{nk} = - \frac{4 \theta \gamma_k^2 \operatorname{sh} q_{nk} b \operatorname{ch} q_{nk} b}{a b \mu_n^2 q_{nk}^2 (\operatorname{sh} q_{nk} b \operatorname{ch} q_{nk} b - q_{nk} b)},$$

$$g_{mkn} = \frac{4 a \gamma_k^2 \operatorname{ch}^2 r_{mk} a [(1 - \nu) \mu_n^2 - \nu (\gamma_k^2 + \mu_m^2)]}{r_{mk} a (\operatorname{sh} r_{mk} a \operatorname{ch} r_{mk} a - r_{mk} a) (\mu_n^2 + r_{mk}^2)^2},$$

$$h_{mkn} = - \frac{4 \operatorname{ch}^2 r_{mk} a [\mu_n^2 \mu_m^2 + \nu \gamma_k^2 (\mu_n^2 + r_{mk}^2)]}{r_{mk} a (\operatorname{sh} r_{mk} a \operatorname{ch} r_{mk} a - r_{mk} a) (\mu_n^2 + r_{mk}^2)^2},$$

$$\varphi_{mk} = \frac{4 \theta \gamma_k^2 \operatorname{sh} r_{mk} a \operatorname{ch} r_{mk} a}{a b \mu_m^2 r_{mk}^2 (\operatorname{sh} r_{mk} a \operatorname{ch} r_{mk} a - r_{mk} a)}$$

а — некоторый параметр, с помощью которого регуляризируется совокупность полученных бесконечных систем (17).

Покажем, что системы (17) квазирегулярные. Оценим сумму модулей коэффициентов при неизвестных для первой системы совокупности (17):

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mnk}| + \sum_{k=1}^{\infty} |b_{mnk}| < \frac{4 p_{mn} \operatorname{sh}^2 p_{mn} l}{2 l |p_{mn} l + (3-4\nu) \operatorname{sh} p_{mn} l \operatorname{ch} p_{mn} l|} \times \\ \times \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{mn}^2}{(\gamma_k^2 + p_{mn}^2)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \nu \gamma_k^2}{(\gamma_k^2 + p_{mn}^2)^2} \right] < \\ < \frac{(1+2\nu) (\operatorname{sh} p_{mn} l \operatorname{ch} p_{mn} l - p_{mn} l)}{2 |p_{mn} l + (3-4\nu) \operatorname{sh} p_{mn} l \operatorname{ch} p_{mn} l|} = f(p_{mn} l).$$

Исследование показывает, что функция $f(x)$ ($x > 0$) монотонно возрастает и достигает своего максимума при $x \rightarrow \infty$.

Таким образом, получим следующую оценку:

$$S_1 < \frac{1+2\nu}{2(3-4\nu)}. \quad (20)$$

Для суммы модулей коэффициентов второй системы (17) будем иметь:

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty} |d_{nkm}| + \sum_{m=1}^{\infty} |e_{nkm}| < \frac{4 \operatorname{ch}^2 q_{nk} b}{q_{nk} b (\operatorname{sh} q_{nk} b \operatorname{ch} q_{nk} b - q_{nk} b)} \times \\ \times \left\{ \alpha \gamma_k^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-\nu) \mu_m^2}{(\mu_m^2 + q_{nk}^2)^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu q_{nk}^2}{(\mu_m^2 + q_{nk}^2)^2} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2 \mu_m^2}{(\mu_m^2 + q_{nk}^2)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu \gamma_k^2}{(\mu_m^2 + q_{nk}^2)} \right\} = 1 - \left[\frac{(1-\alpha-2\nu) \gamma_k^2}{q_{nk}^2} - \right. \\ \left. - \frac{2 q_{nk} b [\lambda_n^2 + \gamma_k^2 \{2(1-\nu) + \nu\}]}{q_{nk}^2 (\operatorname{sh} q_{nk} b \operatorname{ch} q_{nk} b - q_{nk} b)} \right]. \quad (21)$$

Правая часть выражения (21) будет меньше единицы при условии

$$\frac{1-\alpha-2\nu}{\frac{\lambda_n^2}{\gamma_k^2} + \alpha(1-\nu) + \nu} > \frac{2 q_{nk} b}{\operatorname{sh} q_{nk} b \operatorname{ch} q_{nk} b - q_{nk} b}. \quad (22)$$

Аналогичным образом при условии

$$\frac{1-\alpha-2\nu}{\frac{\mu_m^2}{\gamma_k^2} + \alpha(1-\nu) + \nu} > \frac{2 r_{mk} a}{\operatorname{sh} r_{mk} a \operatorname{ch} r_{mk} a - r_{mk} a} \quad (23)$$

сумма модулей коэффициентов третьей системы (17) S_3 также будет меньше единицы.

При фиксированном значении одного из параметров n или k из неравенства (22) можно определить то значение другого из них, начиная с которого неравенство (22) имеет место.

Аналогично из неравенства (23) можно определить соответствующие значения параметров m или k .

Для того, чтобы сумма S_1 была меньше единицы, требуется выполнение неравенства

$$\frac{1+2\nu}{\alpha(3-4\nu)} < 1. \quad (24)$$

С другой стороны, из неравенств (22) и (23) следует

$$1 - \alpha - 2\nu > 0. \quad (25)$$

Неравенства (24) и (25) будут иметь место

$$\text{при } \alpha = 0,617 \text{ и } \nu < 0,19, \quad (26)$$

где ν — коэффициент Пуассона.

Таким образом при выполнении (26) системы (17) оказываются квазирегулярными и имеют сверху ограниченные и стремящиеся к нулю свободные члены.

В частном случае для квадратного сечения ($a = b$) взамен полученной выше совокупности трех квазирегулярных бесконечных систем линейных уравнений получим совокупность двух бесконечных систем.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Գ. Պ. ԳԵՈՆՋՅԱՆ

Զուգահեռանիստի կաշկանդված ոլորումը

Հողվածում դիտարկված է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի կաշկանդված ոլորման խնդրի էզդրիտ լուծումը, երբ հակադիր նիստերում կան բացարձակ կոշտ դիաֆրագմաներ, որոնցից մեկը պտտվում է մյուսի նկատմամբ որոշ անկյան տակ:

Հնդուկված է, որ դիաֆրագմաների միջև եղած հեռավորությունը մնում է անփոփոխ և բացի այդ զուգահեռանիստի մյուս նիստերը ազատ են արտաքին ուժերից: Խնդիրը լուծված է ահափոխությունների օգնությամբ:

Համեմատաբար հավասարակշռության հավասարումների լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի կրկնակի շարքերի միջոցով:

Ինտեգրման հաստատունների որոշումը բերված է գծային հավասարումների երեք անվերջ սիստեմներից կազմված համախմբի լուծմանը:

Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմները կվազիտեղույար են և ունեն վերնից սահմանափակ և զրոյի ձգտող ազատ անդամներ:

ЛИТЕРАТУРА — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Г. М. Валов, Об одной задаче о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями, Вестник МГУ, № 3, 1959. ² М. Мишоноу, Общий метод решения пространственной задачи теории упругости для параллелепипеда, Известия техн. ин-та, Болгар. АН КН 9—10, 1960, ³ П. П. Теодореску, Sur le probleme du parallelepiped elastique, Archiwimechaniku slosowanej, 5/6, 12, 1960. ⁴ А. А. Баб- лоян, С. А. Сиакян, Известия АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. XVII, № 6 (1964).