ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLII 1966 3

МАТЕМАТИКА

Р. В. Амбарцумян

Об одном уравнении для стационарных точечных процессов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 25/I 1966)

§ 1. Введение. Выражаясь нестрого, с каждым стационарным точечным процессом Π конечной интенсивности λ (процесс Π может протекать на прямой (E_1), плоскости (E_2) или в пространстве (E_3)) можно связать нестационарный точечный процесс Π', получаемый из процесса Π путем совмещения начала координат с „произвольным событием" процесса Π. В некоторых случаях обнаруживается непосредственная связь между процессами Π и Π'. Так, если Π есть процесс Пуассона, то

$$\Pi' = \Delta\Pi.$$

Мы используем мультипликативную запись для наложения независимых точечных процессов; поток Δ имеет с вероятностью 1 всего одно событие, которое находится в начале координат. Как показано в ([1]), это уравнение является характеристическим для класса пуассоновских процессов.

В более общем случае так называемого стационарного процесса „пуассоновского наложения скоплений" ([1]) устанавливается уравнение

$$\Pi' = \Gamma\Pi, \tag{1.1}$$

где Γ также является некоторым нестационарным точечным процессом.

Мы можем рассматривать (1.1) как уравнение для Π, в котором Γ — заданный нестационарный процесс. Однако легко построить примеры таких процессов Γ, для которых уравнение (1.1) не имеет решения. С другой стороны, как мы отметили, уравнение (1.1) разрешимо для некоторых Γ. Представляет интерес поэтому описание класса процессов Γ, для которых уравнение (1.1) разрешимо. Основным результатом настоящей работы является выделение из класса процессов Γ тех процессов, для которых уравнение (1.1) разрешимо в классе безгранично-делимых точечных процессов. Отметим, что если уравнение (1.1) разрешимо, то решение (т. е. процесс Π) при заданном λ определяется единственным образом в классе всех стационарных точечных процессов, для которых определен процесс Π'.

В настоящей работе не выясняются общие условия, которым должен удовлетворять процесс Π, для того чтобы оказался определенным процесс Π'. При выводе обобщенных формул Пальма (§ 2) и формальном решении уравнения (1.1) (§ 3) подход состоит в том, что мы требуем существование процесса Π'.

§ 2. Обобщенные формулы Пальма. Начнем с более подробного определения точечных процессов как мер в некотором измеримом пространстве ([2,3]). Выборочное пространство (пространство реализаций) точечных процессов (для определенности протекающих в E_3) составляют всевозможные множества ω точек в E_3, не имеющие точек сгущения. Пусть Ω есть множество всех ω. Через $X(\omega, B)$ будем обозначать число точек, принадлежащих ω и попадающих в выделенное борелевское множество B в E_3. Естественно рассматривать минимальное σ — поле R, порождаемое множествами элементов вида

$$\{\omega; \bar{X}(\bar{B}) = \bar{k}\} = \{\omega;\ X(\omega, B_1) = k_1, \cdots X(\omega, B_n) = k_n\}.$$

Точечный процесс Φ определяется заданием вероятностной меры в измеримом пространстве (Ω, R) Для обозначения этой меры будем употреблять тот же символ Φ. Для задания меры в (Ω, R) достаточно задать вероятности

$$\Phi\{\omega; \bar{X}(\bar{B}) = \bar{k}\} = \Phi_{\bar{k}}(\bar{B}).$$

Стационарность процесса Π означает, что эти вероятности инвариантны относительно сдвига системы множеств $\bar{B}$ на произвольный вектор x, т. е.

$$\Pi_{\bar{k}}(\bar{B} - x) = \Pi_{\bar{k}}(\bar{B}).$$

Процесс Π' становится определенным, если выполняются следующие два условия.

1) Для любой последовательности борелевских множеств C_ε лебеговской меры ε, стремящейся к нулю, справедливо

$$\Pi\{\omega; X(\omega, C_\varepsilon) \geqslant 2\} = o(\varepsilon).$$

2) Пусть C_ε — шар объема ε с центром в начале координат.

Предел $$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Pi_{(1,\bar{k})}(C_\varepsilon, \bar{B})}{\lambda\varepsilon} = \lim\frac{\Pi\{\omega, X(\omega\, C_\varepsilon) = ,1\ \bar{X}(\bar{B}) = \bar{k}\}}{\lambda\varepsilon}$$

существует и определяет вероятностную меру Π' в (Ω, R).

При выводе обобщенных формул Пальма, позволяющих восстанавливать вероятности Π по вероятностям Π', ограничимся случаем, когда $\bar{B}$ есть система непересекающихся шаров.

Наряду с заданной системой непересекающихся шаров $\bar{B}$ нам придется рассматривать однопараметрическое семейство шаров $\bar{B}_{r_i}$, в которой i-тый шар имеет тот же центр, что в системе $\bar{B}$, но перененный радиус r_i; а остальные шары совпадают с заданными в системе $\overline{B}$.

Обозначим через $K(r_i, h)$ шаровой слой, ограниченный сферами радиусов r_i и $r_i + h$, имеющими своим общим центром центр шара B_i. Тогда

$$\Pi_{\bar{k}}(B_{r_i+dr_i}) = \begin{cases} \Pi_{(0,\bar{k})}(K(r_i, dr_i), \overline{B}_{r_i}) & (k_i = 0) \\ \Pi_{(1, k_1 \cdots k_i - 1 \cdots k_n)}(K(r_i, dr_i), \overline{B}_{r_i}) + \\ \quad + \Pi_{(0,\bar{k})}(K(r_i, dr_i), \overline{B}_{r_i}) + o(dr_i) & (k_i > 0) \end{cases}$$

В то же время справедливы эквивалентности $(dr_i \to 0)$

$$\Pi_{(0,\bar{k})}(K(r_i, dr_i), \overline{B}_{r_i}) \approx \Pi_{\bar{k}}(\overline{B}_{r_i}) - \Pi_{(1,\bar{k})}(K(r_i, dr_i), \overline{B}_{r_i}) \qquad (2.1)$$

и

$$\Pi_{(1,\bar{k})}(K(r_i, dr_i), \overline{B}_{r_i}) \approx \lambda dr_i \int_{S_{r_i}} \Pi'_{\bar{k}}(\overline{B}_{r_i} - x)\, dx, \qquad (2.3)$$

где S_{r_i} — периферия i-того шара в системе $\overline{B}_{r_i}$

Из (2.1), (2.2), (2.3) получаем

$$\frac{\partial \Pi_{\bar{k}}(\overline{B}_{r_i})}{\partial r_i} = \begin{cases} -\lambda \int_{S_{r_i}} \Pi'_{\bar{k}}(\overline{B}_{r_i} - x)\, dx & (k_i > 0) \\ \lambda \int_{S_{r_i}} [\Pi'_{(k_1 \cdots k_i - 1, \cdots k_n)}(\overline{B}_{r_i} - x) - \Pi'_{\bar{k}}(\overline{B}_{r_i} - x)]\, dx & (k_i > 0) \end{cases} \qquad (2.4)$$

Из (2.4), выбирая подходящим образом константы интегрирования получаем

$$\Pi_{\bar{k}}(B_{r_i}) = \begin{cases} -\lambda \int_0^{r_i} d\xi_i \int_{S_{\xi_i}} \Pi'_{\bar{k}}(\overline{B}_{\xi_i} - x)\, dx + \Pi_{\bar{k}}(\overline{B}_{r_i=0}) & (k_i = 0) \\ \lambda \int_0^{r_i} d\xi \int_{S_{\xi_i}} [\Pi'_{(k_1 \cdots k_i - 1 \cdots k_n)}(\overline{B}_{\xi_i} - x) - \Pi_{\bar{k}}(\overline{B}_{\xi_i} - x)]\, dx & (k_i > 0) \end{cases} \qquad (2.5)$$

При переходе к производящим функциям

$$\pi(\bar{z}, \overline{B}_{r_i}) = \sum \bar{z}^{\bar{k}}\, \Pi_{\bar{k}}(B_{r_i}); \quad \pi'(\bar{z}, B_{r_i}) = \sum \bar{z}^{\bar{k}}\, \Pi'_{\bar{k}}(B_{r_i})$$

Уравнения (2.4) и (2.5) примут вид соответственно

$$\frac{\partial \pi(\bar{z}, \overline{B}_{r_i})}{\partial r_i} = \lambda (z_i - 1) \int_{S_{r_i}} \pi'(\bar{z}, \overline{B}_{r_i} - x)\, dx, \qquad (2.6)$$

$$\pi(\bar{z}, \bar{B}_{r_i}) = \lambda(z_i - 1)\int_0^{r_i} d\xi_i \int_{S_{\xi_i}} \pi'(\bar{z}, \bar{B}_{\xi_i} - x)\,dx + \pi(\bar{z}, \bar{B}_{r_i=0}) \tag{2.7}$$

Фиксируем какую-нибудь подстановку целых чисел от 1 до n

$$j_1 \cdots j_n,$$

Повторное применение (2.7) позволяет написать окончательное выражение $\pi(\bar{z}, \bar{B})$ через функции π'

$$\pi(\bar{z}, \bar{B}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} (z_{j_k} - 1) \int_0^{r_{j_k}} d\xi_{j_k} \int_{S_{\xi_{j_k}}} \pi'(\bar{z}_{j_1 \cdots j_{k-1}}; \bar{B}_{\xi_{j_k}} - x)\,dx + 1^{+1} \tag{2.8}$$

В этой записи у вектора $\bar{z}_{j_1 \cdots j_{k-1}}$ i-тая компонента равна z_i, если $i \neq j_1 \cdots j_{k-1}$, и 1 в противоположном случае. Формулы (2.4) (или (2.6)) и являются обобщением классических формул Пальма (4).

Особый интерес представляет уравнение (2.8). Поскольку его левая часть не зависит от подстановки $j_1 \cdots j_n$, то же самое справедливо и для правой части. Можно утверждать поэтому, что независимость правой части (2,8) от подстановки $j_1 \cdots j_n$ есть необходимое условие для того, чтобы точечный процесс, описываемый производящими функциями π', совпадал (в смысле распределения) с Π' для некоторого стационарного точечного процесса Π.

З а м е ч а н и е. Пусть M — стационарная мера в измеримом пространстве (Ω, R), от которой потребуем

1) $M\{\omega; \bar{X}(\bar{B}) \neq \bar{0}\}$ конечна для каждой ограниченной системы борелевских множеств $\bar{B}$.

2) Для любой последовательности борелевских множеств C_ε лебеговской меры ε, стремящейся к нулю,

$$M\{\omega; X(\omega, C_\varepsilon) \geqslant 2\} = o(\varepsilon)$$

3) Пусть C_ε — шар объема ε с центром в начале координат. Предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{M_{(1,\bar{k})}(C_{\varepsilon 1}\bar{B})}{\lambda\varepsilon},$$

существует и определяет вероятностную меру M' в (Ω, R).

Положим

$$M_0(\bar{B}) = 1 - M\{\omega; \bar{X}(\bar{B}) \neq \bar{0}\}$$

$$M_{\bar{k}}(\bar{B}) = M\{\omega; \bar{X}(\bar{B}) = \bar{k}\}$$

$$\mu(\bar{z}, \bar{B}) = \sum \bar{z}^{\bar{k}} M_{\bar{k}}(\bar{B})$$

$$\mu'(\bar{z}, \bar{B}) = \sum \bar{z}^{\bar{k}} M'_{\bar{k}}(\bar{B})$$

Для функций μ и μ' справедливы обобщенные формулы Пальма в форме (2.6). В частности, независимо от подстановки $j_1, \cdots j_n$ выполняется

$$\mu(\bar{z}, B) = \lambda \sum_{k=1}^{n} (z_{j_k} - 1) \int_0^{r_{j_k}} d\xi_{j_k} \int_{S_{\xi_{j_k}}} \mu'(\bar{z}_{j_1 \cdots j_{k-1}}, B_{\xi_{j_k}} - x)\, dx + 1$$

§ 3. Решение. Нестационарному точечному процессу Г отвечают производящие функции

$$\gamma(\bar{z}, \bar{B}) = \sum \bar{z}^{k} \Gamma_{\bar{k}}(\bar{B})$$

Для случая, когда $\bar{B}$ есть система непересекающихся шаров, формальное решение уравнения (1.1) получается с помощью обобщенных формул Пальма. Действительно, уравнение (1.1), записанное в производящих функциях, эквивалентно уравнению

$$\pi'(\bar{z}, \bar{B}) = \gamma(\bar{z}, \bar{B})\, \pi(\bar{z}, \bar{B}).$$

В частности, когда вектор x пробегает периферию шаров $B_1 \cdots B_n$, выполняется

$$\pi'(\bar{z}, \bar{B} - x) = \gamma(\bar{z}, \bar{B} - x)\, \pi(\bar{z}, \bar{B} - x). \tag{3.1}$$

Согласно предположению стационарности П

$$\pi(\bar{z}, \bar{B} - x) = \pi(\bar{z}, \bar{B}),$$

поэтому, интегрируя по поверхности шара B_i, получаем

$$\int_{S_{r_i}} \pi'(\bar{z}, \bar{B}_{r_i} - x)\, dx = \pi(\bar{z}, B_{r_i}) \int_{S_{r_i}} \gamma(\bar{z}, \bar{B}_{r_i} - x)\, dx.$$

С помощью (2.6) устанавливаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \pi(\bar{z}, \bar{B}_{r_i})}{\partial r_i} = \lambda \pi(\bar{z}, \bar{B}_{r_i})(z_i - 1) \int_{S_{r_i}} \gamma(\bar{z}, \bar{B}_{r_i} - x)\, dx. \tag{3.2}$$

Интегрируя уравнение (3.2), находим

$$\pi(\bar{z}, \bar{B}) = \pi(\bar{z}, \bar{B}_{r_i = 0})\, e^{\lambda (z_i - 1) \int_0^{r_i} d\xi_i \int_{S_{\xi_i}} \gamma(\bar{z}, \bar{B} - x)\, dx}.$$

Выбрав подстановку $j_1 \cdots j_n$ чисел от 1 до n, выписываем формальное решение

$$\pi(\bar{z}, \bar{B}) = e^{\lambda \sum_{k=1}^{n} (z_{j_k} - 1) \int_0^{r_{j_k}} d\xi_{j_k} \int_{S_{\xi_{j_k}}} \gamma(\bar{z}_{j_1 \cdots j_{k-1}}; \bar{B}_{\xi_{j_k}} - x)\, dx}.$$

Вопрос о разрешимости уравнения (1.1) для данного Г сводится, таким образом, к вопросу о том, является ли правая часть (3.3) производящей функцией для какого-нибудь стационарного точечного процесса П. Отметим, что необходимым условием для этого является независимость показателя в правой части от подстановки $j_1 \dots j_n$. Исходя из общих теорем о безгранично-делимых точечных процессах, легко указать одно достаточное условие разрешимости уравнения (1.1). Именно, достаточно потребовать существование меры M на (Ω, R), удовлетворяющей условиям 1), 2) и 3) замечания § 1 и такой, что мера M' совпадает с вероятной мерой Г. Действительно, согласно замечанию, формула (3.3) в этом случае принимает вид

$$\pi(\overline{z}, \overline{B}) = e^{\mu(\overline{z}, \overline{B}) - 1},$$

а это значит, что $\pi(\overline{z}, \overline{B})$ является производящей функцией для некоторого безгранично-делимого точечного процесса (см. ([2])).

Нашей целью теперь является формулировка более эффективного признака существования решения уравнения (1.1). При этом мы ограничимся процессами Г, которые имеют с вероятностью 1 конечное число событий.

Для таких процессов Г возможно определение преобразованного процесса $A\Gamma$ путем „перенесения начала координат в произвольное событие процесса Г".

В более точных терминах мера $A\Gamma$ строится следующим образом:

1. $A\Gamma\{\omega;\ 0 \in \omega\} = 1$.

2. Пусть $\mathfrak{M}$ — измеримое множество элементов ω, каждый из которых содержит ровно m точек, $0 \in \omega$, $\omega \in \mathfrak{M}$ и никакие два элемента из $\mathfrak{M}$ не могут быть получены друг из друга путем сдвига. Для таких множеств $\mathfrak{M}$ полагаем

$$A\Gamma(\mathfrak{M}) = \frac{1}{m}\Gamma(\underset{x}{U}\, T_x \mathfrak{M}),$$

где T_x — оператор сдвига всех элементов множества $\mathfrak{M}$ на вектор x и объединение берется по всем возможным x.

3. Для произвольного множества из R его $A\Gamma$ — меру строим, разбивая его на счетное число множеств типа $\mathfrak{M}$.

Без доказательства приведем простую

Теорему 1. $A^2\Gamma = A\Gamma$

Теорема 2. *Если* $A\Gamma = \Gamma$, *то уравнение* (1.1) *имеет решения. Эти решения составляют семейство процессов пуассоновского наложения скоплений, различающихся лишь параметром порождающего пуассоновского процесса.*

Доказательство проведем путем прямого построения решений (1.1). Пусть в символической записи

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{\infty} p_n \Gamma_n,$$

где Γ_n — условный процесс Γ, при условии, что в нем произошло ровно n событий, а P_n — вероятность этого условия. Положим

$$g^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n}{n}; \qquad \alpha_n = \frac{P_n}{n} g$$

и пусть

$$\Gamma^* = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Gamma_n .$$

Рассмотрим стационарный процесс пуассоновского наложения скоплений Π, отвечающий пуассоновскому процессу с параметром a со скоплениями, представляющими собой независимые реализации процесса Γ^* [3]. Тогда, согласно результатам, полученным в [1],

$$\Pi' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n}{g} A\Gamma_n\right)\Pi = \left(A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\alpha_n}{g} \Gamma_n\right)\Pi = (A\Gamma)\,\Pi$$

По условию теоремы это означает, что

$$\Pi' = \Gamma\Pi.$$

Теорема доказана.

Теорема 1, очевидно, доставляет нам способ построения процессов, удовлетворяющих условию теоремы 2.

В заключение отметим, что внутренние свойства процесса Γ (т. е. свойства, которые не зависят от перемещения начала координат) являются инвариантными относительно преобразования A.

Институт математики и
механики Академии наук
Армянской ССР

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

Ստացիոնար կետային պրոցեսների համար մի հավասարման վերաբերյալ

Համընկեցնելով կոորդինատների սկզբի հետ տվյալ ստացիոնար պրոցեսի (Π) կամայական պատահարը, մենք ստանում ենք մի այլ Π պրոցես, որը արդեն ստացիոնար չէ։ Այն ժամանակ $\Pi' = \Gamma\Pi$ հարաբերությունը կարող է դիտվել որպես մի հավասարում անհայտ Π պրոցեսի համար։ Այստեղ Γ-տրված ոչ ստացիոնար պրոցես է։ Դուրս են բերվում որոշ անհրաժեշտ պայմաններ, որոնց պետք է բավարարի Γ պրոցեսը հավասարման լուծման գոյության համար։ Առանձին դուրս են բերվում նաև որոշ բավարար պայմանները։ Ցույց է տրվում, որ լուծումը միակ է, եթե նա գոյություն ունի և եթե բացի հավասարումից տրված է փնտրվող Π պրոցեսի ինտենսիվությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. В. Амбарцумян.* ДАН Арм. ССР. т. XLI, № 2 (1965). [2] *P. Lee*, Infinite devisible point processes (не публиковано). [3] *Kl. Mattes*, Unbeshränkt teilbare Verteilungs gesetze stationärer zufälliger Punktfolgen; *Z. Wiss., F. Hochsch*, Elektrotechn. Ilmenau 9 (1963) H. 3. [4] *А. Я. Хинчин*, Математические методы теории массового обслуживания. Труды математического института им. Стеклова т. 49 (1955).