

Ф. Г. Арутюнян

О рядах по системе Хаара

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 20/X 1965)

1°. В настоящей статье приводятся некоторые результаты о рядах по системе Хаара. Прежде всего определим систему Хаара (см. (1), стр. 57—61),

$$X_0^0(x) = 1, \text{ при } 0 \leq x \leq 1. \quad (1)$$

Для определения функций $X_n^{(k)}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, 2^n$ разделим отрезок $[0, 1]$ на 2^{n+1} равных частей и обозначим через $\Delta_n^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$, полученные открытые интервалы.

$$\chi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{при } x \in \Delta_n^{(2k-1)} \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } x \in \Delta_n^{(2k)} \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (2)$$

Через $\{\chi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; обозначаются функции системы Хаара, перенумерованные в порядке

$$\chi_0^{(0)}(x), \chi_0^{(1)}(x), \chi_1^{(1)}(x), \chi_1^{(2)}(x), \dots, \chi_n^{(1)}(x), \dots, \chi_n^{(2^n)}(x), \dots \quad (3)$$

Для рядов по системе Хаара верны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть имеем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \quad (4)$$

по системе Хаара и пусть почти всюду на некотором множестве G ($|G| > 0$) имеет место

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \chi_k(x) > -\infty, \quad (5)$$

тогда ряд (4) почти всюду сходится на G к $f(x)$ и $f(x)$ почти везде конечная функция на G .

Теорема 2. Для того, чтобы ряд (4) сходился почти всюду на некотором множестве G ($|G| > 0$), необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на G имело место

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n \chi_n(x)|^2 < +\infty \quad (6)$$

Теорема 3. Пусть $f(x)$ измеримая почти везде конечная функция на $[0,1]$, тогда существует абсолютно сходящийся почти всюду на $[0,1]$ ряд (4) такой, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) = f(x), \text{ почти всюду на } [0,1]. \quad (7)$$

Теорема 4. Пусть $f(x) \in L_2[0,1]$ и $\varepsilon > 0$ тогда существует функция $\Psi(x) \in L_2[0,1]$, $|E(\Psi(x) \neq f(x))| < \varepsilon$, ряд Фурье которой абсолютно сходится, почти всюду на $[0,1]$.

Отметим, что результат, аналогичный теореме 1, был получен П. Л. Ульяновым для рядов по системе Радомахера (см. (2), следствие 7).

Из теоремы 1 следует также совместный с А. А. Талаляном результат (3) о том, что ряды по системе Хаара не могут сходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры.

Теорема 3 является усилением теоремы Бари о возможности представления почти везде конечных измеримых функций рядами по системе Хаара (4).

Результаты, аналогичные теореме 4, для некоторых полных ортонормированных систем были получены А. А. Талаляном (5).

Если при построении системы Хаара разделим $[0,1]$ по другому (однако двоичному) принципу, без требования равенства интервалов разбиения, причем так, чтобы точки деления были плотны из $[0,1]$, то получим аналогичную полную систему. Такие системы мы будем называть системами типа Хаара. Системы типа Хаара дают возможность доказать теорему 6, показывающую завершенность в некотором смысле нижеследующей теоремы 5.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; ортогональная система на $[0,1]$. Обозначим

$$E_n^- = E(\varphi_n(x) < 0), \quad E_n^+ = E(\varphi_n(x) > 0), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (8)$$

Теорема 5. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; ортогональная система. Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_n^-|}{|E_n^+|} < +\infty \quad (9)$$

то система $\{\varphi_n(x)\}$ не полная.

Теорема 6. Пусть дана произвольная последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; такая, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = +\infty \quad (10)$$

тогда существует полная ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$; для которой

$$\frac{|E_n^-|}{|E_n^+|} < \varepsilon_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (11)$$

Доказательства теорем 1—4 основаны на нижеследующих леммах.
II°. Пусть имеем ряд

$$\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{n_k}(x), \quad n_{k+1} > n_k, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (12)$$

составим непустой подряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_i} \chi_{n_{k_i}}(x) \quad (13)$$

ряда Ω . Скажем, что ряд (13) принадлежит классу $H(\Omega)$, если из того, что $\chi_{n_{k_i}}(x)$ не участвует как слагаемое в ряде (13), следует, что туда не входят и все те функции $\chi_{n_j}(x)$, которые равны нулю вне множества $E(\chi_{n_{k_i}}(x) \neq 0)$.

З а м е ч а н и е. Подряд из $H(\Omega)$, в частности, может быть составлен из конечного числа слагаемых.

Л е м м а 1. Пусть имеем ряд (12), частные суммы которого снизу ограничены числом M , тогда частные суммы любого его подряда из $H(\Omega)$ тоже снизу ограничены тем же числом M .

Л е м м а 2. Пусть нижний предел частичных сумм ряда (12) больше $-\infty$ почти всюду на некотором множестве G ($|G| > 0$), тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подряд (13) из $H(\Omega)$ с ограниченными снизу частичными суммами, для которого

$$|G \cap (\cup_{\substack{n_k \neq n_{k_i} \\ i=1, 2, \dots}} E(\chi_{n_k}(x) \neq 0))| < \varepsilon. \quad (14)$$

Л е м м а 3. Пусть верхний предел частичных сумм ряда (12) равен $+\infty$ на некотором множестве G ($|G| > 0$). Тогда для любых M и ε можно указать такой конечный подряд $\sum_{i=1}^m a_{k_i} \chi_{n_{k_i}}(x)$ из $H(\Omega)$ так, что

$$|E\left(\sum_{i=1}^m a_{k_i} \chi_{n_{k_i}}(x) > M\right)| > |G| - \varepsilon. \quad (15)$$

Л е м м а 4. Пусть дана непрерывная функция $f(x)$, тогда для любых заданных n , $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно указать такую конечную

сумму $S(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \chi_{n_k}(x)$, чтобы имело место

$$|E\left(\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \chi_{n_k}(x) - f(x)\right| > \delta\right)| < \varepsilon \quad (16)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |a_{k,j,k}(x)| \leq \frac{8}{\varepsilon} |f(x)|, x \in [0,1]. \quad (17)$$

В доказательствах лемм 1—3 использован, в частности, метод работы (3).

III°. Доказательство теоремы 5. Теорема 5 доказывается очень просто. В самом деле, обозначим

$$1^\circ E = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k^-,$$

$$2^\circ G_k = E(|\varphi_k(x)| = +\infty), k = 0, 1, 2, \dots; \quad (18)$$

$$3^\circ G = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k.$$

Из (9) следует

$$\sum_{k=0}^{\infty} |E_k^-| < +\infty \quad (19)$$

и, следовательно, в силу (18) получим

$$|E| = 0 \text{ и } |G| = 0. \quad (20)$$

Пусть $x_0 \in [0,1] \setminus (E + G)$. Тогда для некоторого натурального числа $i_0 = i_0(x_0)$ имеем $x_0 \in E_i^-$ для всех $i > i_0$ и $|\varphi_j(x_0)| < +\infty$ для всех $j = 0, 1, 2, \dots$; Следовательно

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\varphi_i^-(x_0)|^2 = \sum_{i=0}^{i_0} |\varphi_i(x_0)|^2 + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} |\varphi_i^-(x_0)|^2 = \sum_{i=0}^{i_0} |\varphi_i^-(x_0)|^2 < +\infty. \quad (21)$$

Из соотношения (3) вытекает, что соотношение (21) выполняется почти везде в $[0,1]$. Это противоречит теореме Козлова (см. (1), стр. 347). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 6. Возьмем последовательность положительных чисел $\{a_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$; удовлетворяющую условиям

$$1^\circ a_k \rightarrow 0, \text{ при } k \rightarrow +\infty,$$

$$2^\circ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty,$$

$$3^\circ a_k < \varepsilon_{k,2}, k = 0, 1, 2, \dots; \quad (22)$$

$$4^\circ a_k < \frac{1}{2}, k = 0, 1, 2, \dots.$$

В силу (2°, (22)) можно указать числа $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$; так, чтобы имело место

$$\prod_{l=n_k+1}^{n_{k+1}} (1 - a_l) < a_{k+1}. \quad (23)$$

Определим числа $0 = k_0 < k_1 < \dots < k_l < \dots$; следующим образом

$$k_{i+1} = k_i + n_{k_i} + 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots; \quad (24)$$

Очевидно

$$k_1 = 1. \quad (24^*)$$

Обозначим

$$1 = x_0^{(0)} > x_1^{(0)} = 0 \quad (25)$$

или, что то же самое

$$1 = x_{n_{k_0}}^{(0)} > x_{n_{k_0}+1}^{(0)} = 0. \quad (25^*)$$

Положим

$$t_0^{(0,0)} = x_0^{(0)} \quad (26)$$

$$t_v^{(0,0)} = x_1^{(0)} + (x_0^{(0)} - x_1^{(0)}) \prod_{j=1}^v (1 - \alpha_j), \quad v = 1, 2, \dots, n_1 \quad (27)$$

и

$$1 = x_0^{(1)} > x_1^{(1)} > \dots > x_{n_1}^{(1)} > x_{n_1+1}^{(1)} = 0, \quad (28)$$

где

$$x_v^{(1)} = t_v^{(0,0)}, \quad v = 0, 1, 2, \dots, n_1.$$

Пусть для некоторого $i \geq 0$ уже определены точки

$$1 = x_0^{(i)} > x_1^{(i)} > \dots > x_{n_{k_i}}^{(i)} > x_{n_{k_i}+1}^{(i)} = 0. \quad (29)$$

Положим $t_0^{(i,p)} = x_p^{(i)}$, $p = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i}$

$$t_v^{(i,p)} = x_{p+1}^{(i)} + (x_p^{(i)} - x_{p+1}^{(i)}) \prod_{j=n_{k_i}+p+1}^{n_{k_i}+p+v} (1 - \alpha_j) \quad (30)$$

$$p = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i}, \quad v = 1, 2, \dots, n_{k_i+p+1} - n_{k_i+p}.$$

Очевидно

$$t_v^{(i,p)} > t_\mu^{(i,p)}, \quad \text{если } v < \mu \quad (31)$$

и

$$t_v^{(i,p)} > t_\mu^{(i,q)}, \quad \text{если } p < q.$$

Число точек $t_v^{(i,p)}$, $v = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i+p+1} - n_{k_i+p}$ равно $n_{k_i+p} + 1$. Следовательно в силу (24) число точек $t_v^{(i,p)}$, $p = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i}$ $v = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i+p+1} - n_{k_i+p}$ равно

$$\sum_{p=0}^{n_{k_l}} (n_{k_i+p+1} - n_{k_i+p} + 1) = n_{k_i} + n_{k_i+1} - n_{k_i} + n_{k_i} + 1 = n_{k_i+1} + 1 \quad (32)$$

Примем $0 = x_{n_{k_l}+1}^{(l+1)}$ и через

$$1 = x_0^{(l+1)} > x_1^{(l+1)} > \dots > x_{n_{k_l+1}}^{(l+1)} > x_{n_{k_l+1}+1}^{(l+1)} = 0 \quad (33)$$

обозначим точки $t_v^{(i,p)}$ $p = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i}$, $v = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i+p+1} - n_{k_i+p}$, занумерованные в порядке убывания.

Функции $\{\varphi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, определим следующим образом

$$\varphi_0(x) = 1, \text{ при } x \in [0, 1]. \quad (34)$$

$$\varphi_{n_{k_i+p}+v}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in (x_{p+1}^{(i)}, t_v^{(i,p)}), \\ -Y_{n_{k_i+p}+v}, & \text{при } x \in (t_v^{(i,p)}, t_{v-1}^{(i,p)}), \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases} \quad (35)$$

где

$$Y_{n_{k_i+p}+v} = \frac{1 - 2^{n_{k_i+p}+v}}{2^{n_{k_i+p}+v}}, \quad (36)$$

$$v = 1, 2, \dots, n_{k_i+p+1} - n_{k_i+p}; \quad p = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Из (31) и (35) имеем

$$E_{n_{k_i+p}+v}^- = (t_v^{(i,p)}, t_{v-1}^{(i,p)}) \quad (37)$$

и

$$E_{n_{k_i+p}+v}^+ = (x_{p+1}^{(i)}, t_v^{(i,p)}).$$

Учитывая (3°, (22)), (4°, (22)) и (30), легко получим

$$\frac{|E_{n_{k_i+p}+v}^-|}{|E_{n_{k_i+p}+v}^+|} < 2^{n_{k_i+p}+v} < 2^{n_{k_i+p}+v}, \quad (38)$$

где

$$v = 1, 2, \dots, n_{k_i+p+1} - n_{k_i+p}; \quad p = 0, 1, 2, \dots, n_{k_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

С другой стороны, по определению $E_0^- = E(\varphi_0(x) < 0)$ пустое множество, следовательно

$$\frac{|E_n^-|}{|E_n^+|} < \varepsilon_n, \quad n = 0, 2, \dots \quad (39)$$

Можно показать, что построенная система является переставленной системой типа Хаара, точки деления которой всюду плотны в $[0, 1]$. На этом и заканчивается доказательство теоремы 6.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հաարի սխեմայի շարքերի մասին

Դիտարկենք

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k/k}(x) \quad (1)$$

շարքը ըստ հաարի սխեմայի, և նշանակենք $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{k/k}(x)$ 1) եթե $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) =$

$f(x)$ -ը համարյա ամենուրեք վերջավոր ֆունկցիա է E ($|E| > 0$) բազմության վրա, ապա (1) շարքը E -ի վրա զուգամիտում է համարյա ամենուրեք:

2) E ($|E| > 0$) — բազմության վրա (1) շարքի համարյա ամենուրեք զուգամիտումը համար անհրաժեշտ է և բավարար E -ի վրա

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{k/k}(x)|^2 \quad (2)$$

շարքի համարյա ամենուրեք զուգամիտումը:

3) Թող $\{\varphi_n(x)\}$ լինի օրթոգոնալ սխեմա, եթե

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E(\varphi_n(x) < 0)|}{|E(\varphi_n(x) > 0)|} \quad (3)$$

ապա սխեման լրիվ է:

4) Թող $\varepsilon_n > 0$ և $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = +\infty$, զոյություն ունի լրիվ օրթոգոնալ $\{\varphi_n(x)\}$ սխեմա

այնպես որ՝

$$\frac{|E(\varphi_n(x) < 0)|}{|E(\varphi_n(x) > 0)|} < \varepsilon_n, n = 0, 1, 2, \dots; \quad (4)$$

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

- ¹ С. Качмаж и Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1953.
² П. Л. Ульянов, Известия АН СССР, серия матем., 24 (1960), 75—92. ³ А. А. Талалян и Ф. Г. Арутюнян, О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Матем. сборник, т. 66(108);2, 1965, 240—247. ⁴ Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд, стр. 527, М.—Л., 1951. ⁵ А. А. Талалян, Известия АН СССР, серия матем., 28 (1964), 713—720.