ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLII 1966 2

МАТЕМАТИКА

И. С. Саргсян

Теорема о полноте собственных функций обобщенной системы Дирака

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 20/IX 1965)

1. Пусть L означает матричный оператор

$$L \equiv \begin{pmatrix} P(x), & I\dfrac{d}{dx} \\ -I\dfrac{d}{dx}, & Q(x) \end{pmatrix},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ заданные квадратные симметричные матрицы порядка k:

$$P(x) \equiv \begin{pmatrix} p_{11}(x), & p_{12}(x), \cdots, & p_{1k}(x) \\ p_{21}(x), & p_{22}(x), \cdots, & p_{2k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1}(x), & p_{k2}(x), \cdots, & p_{kk}(x) \end{pmatrix},$$

$$Q(x) \equiv \begin{pmatrix} q_{11}(x), & q_{12}(x), \cdots, & q_{1k}(x) \\ q_{21}(x), & q_{22}(x), \cdots, & q_{2k}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k1}(x), & q_{k2}(x), \cdots, & q_{kk}(x) \end{pmatrix},$$

а I—единичная матрица того же порядка, т. е.

$$I \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0, \cdots, 0 \\ 0, & 1, \cdots, 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0, & 0, \cdots, 1 \end{pmatrix}_k$$

Далее, пусть $y(x)$ означает двухкомпонентную вектор-функцию порядка k от вещественной переменной x. Функцию $y(x)$ можно представить в матричной форме:

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x), & y_1^{(2)}(x), & \cdots, & y_1^{(k)}(x) \\ y_2^{(1)}(x), & y_2^{(2)}(x), & \cdots, & y_2^{(k)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (λ-параметр)

$$(L-\lambda I)\,y=0$$

эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_2^{(i)}}{dx}+p_{i1}(x)\,y_1^{(1)}(x)+p_{i2}(x)\,y_1^{(2)}(x)+\cdots+p_{ik}(x)\,y_1^{(k)}(x)=\lambda y_1^{(i)}(x)\\ -\frac{dy_1^{(i)}}{dx}+q_{i1}(x)\,y_2^{(1)}(x)+q_{i2}(x)\,y_2^{(2)}(x)+\cdots+q_{ik}(x)\,y_2^{(k)}(x)=\lambda y_2^{(i)}(x)\end{aligned}\right|$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k. \tag{1}$$

Предположим, что матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны, вещественны и определены на интервале $[0, \pi]$. Непрерывность матриц $P(x)$ и $Q(x)$ означает непрерывность их элементов, т. е. функций $p_{ij}(x)$ и $q_{ij}(x)$, $i, j=1, 2, \cdots, k$.

Присоединим к системе (1) граничные условия:

$$y_2(0)-y_1(0)\,h=0, \tag{2}$$

$$y_2(\pi)-y_1(\pi)\,H=0, \tag{3}$$

где h и H квадратные симметричные числовые матрицы порядка k:

$$h=\begin{pmatrix}h_{11}, & h_{12}, & \cdots, & h_{1k}\\ h_{21}, & h_{22}, & \cdots, & h_{2k}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ h_{k1}, & h_{k2}, & \cdots, & h_{kk}\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}H_{11}, & H_{12}, & \cdots, & H_{1k}\\ H_{21}, & H_{22}, & \cdots, & H_{2k}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ H_{k1}, & H_{k2}, & \cdots, & H_{kk}\end{pmatrix}$$

и $\operatorname{Det} h\neq 0$, $\operatorname{Det} H\neq 0$, так что обратные матрицы h^{-1} и H^{-1} существуют.

2. В настоящей заметке изучается вопрос полноты собственных вектор-функций задачи (1) + (2) + (3) в классе интегрируемых с квадратом вектор-функций $f(x)\equiv\begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}\subset L^2(0, \pi)$, т. е. функций, для которых

$$\int_0^{\pi}\sum_{i=1}^{k}\{[f_1^{(i)}(x)]^2+[f_2^{(i)}(x)]^2\}\,dx<+\infty.$$

Аналогичный вопрос для задачи (1) + (2) + (3) при $k=1$, т. е. для задачи

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_2}{dx}+p(x)\,y_1=\lambda y_1\\ -\frac{dy_1}{dx}+q(x)\,y_2=\lambda y_2\end{aligned}\right| \tag{4}$$

$$y_2(0)\sin\alpha+y_1(0)\cos\alpha=0, \tag{5}$$

$$y_2(\pi)\sin\beta+y_1(\pi)\cos\beta=0, \tag{6}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — вещественные функции, α, β — произвольные действительные числа, рассмотрен Э. Ч. Титчмаршем ([1]). Им рассмотрен случай и бесконечного интервала $(0, \infty)$ [2]. Наш метод отличается от метода Титчмарша и аналогичен методу Б. М. Левитана (см. [3], приложение 1).

3. Пусть вектор-функции $y_1(x) = \{y_1^{(1)}(x), y_1^{(2)}(x), \cdots, y_1^{(k)}(x)\}$ и $y_2(x) = \{y_2^{(1)}(x), y_2^{(2)}(x), \cdots, y_2^{(k)}(x)\}$ являются решениями системы (1) и удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$y_1^{(i)}(0) = 1, \quad y_2^{(i)}(0) = \sum_{j=1}^{k} h_{ji}, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{7}$$

Очевидно, что функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют условию (2).

Обозначим через n произвольное натуральное число и пусть $\Delta = \frac{\pi}{n}$. Далее, положим $x_\nu = \nu\Delta$, $p_{ij}^{(\nu)} = p_{ij}(\nu\Delta)$, $q_{ij}^{(\nu)} = q_{ij}(\nu\Delta)$ и пусть $y_{1,\nu}^{(i)}$ и $y_{2,\nu}^{(i)}$, $(\nu = 0, 1, \cdots, n-1)$, компоненты векторов, которые будут определены ниже. Заменим производные функций $y_1^{(i)}(x)$ и $y_2^{(i)}(x)$ разностными отношениями, т. е. положим (в точке $x = x_\nu$)

$$\frac{d}{dx} y_1^{(i)}(x) \sim \frac{y_{1,\nu}^{(i)} - y_{1,\nu-1}^{(i)}}{\Delta}, \qquad i = 1, 2, \cdots, k, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} y_2^{(i)}(x) \sim \frac{y_{2,\nu+1}^{(i)} - y_{2,\nu}^{(i)}}{\Delta}, \qquad \nu = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{9}$$

Так как по предположению вектор-функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями системы (1), то заменив в этих уравнениях производные выражениями (8) и (9), мы получим следующую систему в конечных разностях

$$\frac{y_{2,\nu+1}^{(i)} - y_{2,\nu}^{(i)}}{\Delta} + p_{i1}^{(\nu)} y_{1,\nu}^{(1)} + p_{i2}^{(\nu)} y_{1,\nu}^{(2)} + \cdots + p_{ik}^{(\nu)} y_{1,\nu}^{(k)} - \lambda y_{1,\nu}^{(i)} = 0, \tag{10}$$

$$-\frac{y_{1,\nu}^{(i)} - y_{1,\nu-1}^{(i)}}{\Delta} + q_{i1}^{(\nu)} y_{2,\nu}^{(1)} + q_{i2}^{(\nu)} y_{2,\nu}^{(2)} + \cdots + q_{ik}^{(\nu)} y_{2,\nu}^{(k)} - \lambda y_{2,\nu}^{(i)} = 0, \tag{11}$$

где $\nu = 0, 1, \cdots, n-1$; $i = 1, 2, \cdots, k$.

Положим

$$y_{1,-1}^{(i)} = 1, \quad y_{2,0}^{(i)} = \sum_{j=1}^{k} h_{ji}, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{12}$$

Из системы (10)—(11) и условий (12) можно последовательно определить $y_{1,0}^{(i)}, y_{1,1}^{(i)}, \cdots, y_{1,n-1}^{(i)}$ и $y_{2,1}^{(i)}, y_{2,2}^{(i)}, \cdots, y_{2,n}^{(i)}$, $(i = 1, 2, \cdots, k)$. Далее, нетрудно показать (см., например, [4], стр. 12), что при $n \to \infty$ и $\nu\Delta \to x$ векторы $\{y_{1,\nu}^{(1)}, y_{1,\nu}^{(2)}, \cdots, y_{1,\nu}^{(k)}\}$ и $\{y_{2,\nu}^{(1)}, y_{2,\nu}^{(2)}, \cdots, y_{2,\nu}^{(k)}\}$ стремятся к решениям задачи (1) + (7) и притом равномерно в каждой области $(0 \leqslant x \leqslant \pi;\ 0 \leqslant |\lambda| \leqslant R < \infty)$.

Присоединим к задаче (10) + (11) + (12) граничное условие

$$y_{2,n}^{(i)} - \sum_{j=1}^{k} H_{ij}\, y_{1,n-1}^{(j)} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, k), \tag{13}$$

которое получается из граничного условия (3). Полученная задача для системы в конечных разностях, очевидно, представляет собой алгебраическую задачу на собственные значения в nk-мерном векторном пространстве.

Скалярное произведение векторов $y = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}, & y_1^{(2)}, & \cdots, & y_1^{(k)} \\ y_2^{(1)}, & y_2^{(2)}, & \cdots, & y_2^{(k)} \end{pmatrix}$ и $z = \begin{pmatrix} z_1^{(1)}, & z_1^{(2)}, & \cdots, & z_1^{(k)} \\ z_2^{(1)}, & z_2^{(2)}, & \cdots, & z_2^{(k)} \end{pmatrix}$ определим с помощью равенства

$$(y, z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \left(y_{1,\nu}^{(i)} z_{1,\nu}^{(i)} + y_{2,\nu}^{(i)} z_{2,\nu}^{(i)}\right) \Delta. \tag{14}$$

Лемма 1. *Собственные векторы задачи* (10) + (11) + (12) + + (13), *соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, т. е. если собственному значению* λ *соответствует собственный вектор* y, *а собственному значению* μ — *собственный вектор* z *и* $\lambda \neq \mu$, $(y, z) = 0$.

Лемма 2. *Собственные значения задачи* (10) + (11) + (12) + + (13) *вещественны.*

Обозначим собственные значения задачи (10) + (11) + (12) + (13) в порядке их роста через $\lambda_m^{(\Delta)}$, $(m = 1, 2, \cdots n)$ и соответствующие собственные векторы через

$y_m^{(\Delta)} = \{y_{1,0}^{(i)m}, y_{1,1}^{(i)m}, \cdots, y_{1,n-1}^{(i)m};\ y_{2,0}^{(i)m}, y_{2,1}^{(i)m}, \cdots, y_{2,n-1}^{(i)m}\}$, $i = 1, 2, \cdots, k$.
Далее, обозначим через $\alpha_{m,\Delta}^2$, квадрат нормы вектора $y_m^{(\Delta)}$

$$\alpha_{m,\Delta}^2 = \|y_m^{(\Delta)}\|^2 = (y_m^{(\Delta)}, y_m^{(\Delta)}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \{[y_{1,\nu}^{(i)m}]^2 + [y_{2,\nu}^{(i)m}]^2\} \Delta. \tag{15}$$

Векторы $y_1^{(\Delta)}, y_2^{(\Delta)}, \cdots, y_n^{(\Delta)}$ образуют в n-мерном пространстве двухкомпонентных k-мерных векторов ортогональный базис. Поэтому для произвольного вектора $f = \{f_{1,0}^{(i)}, f_{1,1}^{(i)}, \cdots, f_{1,n-1}^{(i)};\ f_{2,0}^{(i)}, f_{2,1}^{(i)}, \cdots, f_{2,n-1}^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \cdots, k$, имеет место равенство Парсеваля

$$(f, f) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{k} \{|f_{1,\nu}^{(i)}|^2 + |f_{2,\nu}^{(i)}|^2\} \Delta = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{m,\Delta}^2} (f, y_m^{(\Delta)})^2. \tag{16}$$

Обозначим через $y_\nu(\lambda) = \begin{pmatrix} y_{1\nu}(\lambda) \\ y_{2\nu}(\lambda) \end{pmatrix}$ решение системы (10) – (11), удовлетворяющее условиям (12), а через $y(x, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x, \lambda) \\ y_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ — решение системы (1), удовлетворяющее условиям (7). Если $\Delta \to 0$ и $\nu\Delta \to x$, то $y_\nu(\lambda) \to y(x, \lambda)$ равномерно в каждой конечной области плоскости λ.

Поэтому равенство Парсеваля для задачи (1) + (2) + (3) можно получить из равенства (16), полагая $\Delta \to 0$, т. е. справедлива

Теорема 1. *Пусть* $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \subset L^2(0, \pi)$. *Тогда имеет место равенство*

$$\int_0^{\pi} \sum_{l=1}^{k} \{|f_1^{(l)}(x)|^2 + |f_2^{(l)}(x)|^2\} dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_m^2} \left| \sum_{l=1}^{k} \int_0^{\pi} [f_1^{(l)}(x)\, y_1^{(l)}(x, \lambda_m) + f_2^{(l)}(x)\, y_2^{(l)}(x, \lambda_m)]\, dx \right|^2,$$

или, более компактно, т. е. в векторной форме записи,

$$\int_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2}{\alpha_m^2},$$

где $(m = 1, 2, 3, \cdots)$

$$y(x, \lambda_m) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x, \lambda_m), & y_1^{(2)}(x, \lambda_m), & \cdots, & y_1^{(k)}(x, \lambda_m) \\ y_2^{(1)}(x, \lambda_m), & y_2^{(2)}(x, \lambda_m), & \cdots, & y_2^{(k)}(x, \lambda_m) \end{pmatrix}$$

собственные вектор-функции задачи (1) + (2) + (3),

$$\alpha_m^2 = \sum_{l=1}^{k} \int_0^{\pi} \{[y_1^{(l)}(x, \lambda_m)]^2 + [y_2^{(l)}(x, \lambda_m)]^2\} dx,$$

$$f^2(x) = \sum_{l=1}^{k} \{[f_1^{(l)}(x)]^2 + [f_2^{(l)}(x)]^2\},$$

$$c_m = \sum_{l=1}^{k} \int_0^{\pi} \{f_1^{(l)}(x)\, y_1^{(l)}(x, \lambda_m) + f_2^{(l)}(x)\, y_2^{(l)}(x, \lambda_m)\} dx.$$

4. Рассмотрим теперь случай бесконечного интервала. Пусть коэффициенты системы (1), т. е. функции $p_{ij}(x)$ и $q_{ij}(x)$, определены на полупрямой $(0, \infty)$ и суммируемы в каждом конечном интервале. Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть* $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_k(x)$,

$$u_l(x) \equiv \begin{pmatrix} u_{1l}(x) \\ u_{2l}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1l}^{(1)}(x), & u_{1l}^{(2)}(x), & \cdots, & u_{1l}^{(k)}(x) \\ u_{2l}^{(1)}(x), & u_{2l}^{(2)}(x), & \cdots, & u_{2l}^{(k)}(x) \end{pmatrix} \equiv u_l(x, \lambda),$$

решения системы (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$u_{1l}^{(j)}(0) = 1, \quad (i, j = 1, 2, \cdots, k), \quad u_{2l}^{(j)}(0) = \begin{cases} 1, & j = l, \\ 0, & j \neq l, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, k),$$

а вектор-функция $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \subset L^2(0, \infty)$, *т. е.*

$$\int_0^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \{[f_1^{(l)}(x)]^2 + [f_2^{(l)}(x)]^2\} dx < +\infty.$$

Тогда существует симметричная матричная функция распределения

$$\sigma(\lambda) = \| \sigma_{ij}(\lambda) \|, \quad i, j = 1, 2, \cdots, k,$$

такая, что формулы

$$F_i(\lambda) = \int_0^\infty \sum_{l=1}^k \{ f_1^{(l)}(x) u_{1l}^{(i)}(x, \lambda) + f_2^{(l)}(x) u_{2l}^{(i)}(x, \lambda) \} \, dx, \tag{17}$$

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(l)}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{k} \{ F_i(\lambda) u_{1j}^{(l)}(x, \lambda) \, d\sigma_{ij}(\lambda) \\ f_2^{(l)}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{k} F_i(\lambda) u_{2j}^{(l)}(x, \lambda) \, d\sigma_{ij}(\lambda) \end{aligned} \right\}, \quad (l = 1, 2, \cdots, k), \tag{18}$$

осуществляют взаимно обратные изометрические отображения пространства $L^2(0, \infty)$ *на пространство* $L^2_{\{\sigma(\lambda)\}}(-\infty, \infty)$ *и* $L^2_{\{\sigma(\lambda)\}}$ *на* L^2 *соответственно, при этом интегралы в формулах (17) и (18) сходятся в смысле метрики в* $L^2_{\{\sigma(\lambda)\}}$ *и* L^2 *соответственно и справедливо равенство Парсеваля*

$$\int_0^\infty \sum_{l=1}^k \{ [f_1^{(l)}(x)]^2 + [f_2^{(l)}(x)]^2 \} \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i,j=1}^{k} F_i(\lambda) F_j(\lambda) \, d\sigma_{ij}(\lambda).$$

В заключение искренне благодарю Б. М. Левитана за постановку задачи, интерес к работе и обсуждение результатов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ի. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Թեորեմ Դիրակի ընդհանրացված սիստեմի սեփական ֆունկցիաների լրիվության մասին

Ցույց է տրված, որ (1) + (2) + (3) խնդրի (տես հիմնական տեքստում) սեփական ֆունկցիաների սիստեմը լրիվ է $L^2(0, \pi)$ *դասում։ Հոդվածում բերված է այդ թեորեմի անալոգ թեորեմը նաև* $L^2(0, \infty)$ *դասում։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Э. Ч. Титчмарш*, Quatr. Journ. Math. 13 (1942), 1—10. [2] *Э. Ч. Титчмарш*, Proc. London Math. Soc. (3), 11 (1961), 159—168. [3] *Б. М. Левитан*, Приложение 1 к книге Э. Ч. Титчмарша—Разложение по собственным функциям, т. 1. Изд. ИЛ, М. 1960. [4] *Э. Коддингтон, Н. Левинсон*, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1958.