ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLII 1966 2

МАТЕМАТИКА

В. Х. Мусоян

Об аналитическом продолжении функций, аппроксимируемых полиномами Дирихле

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/VIII 1965)

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ —последовательность комплексных чисел, $m_1, m_2, \cdots, m_\nu, \cdots$ —последовательность целых положительных чисел. Рассмотрим систему функций

$$e^{\lambda_\nu z}, ze^{\lambda_\nu z}, \cdots, z^{m_\nu - 1} e^{\lambda_\nu z}; \nu = 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

Предположим, что она неполна в метрике C на отрезке мнимой оси $[-qi, qi]$ $(0 < q < \infty)$. Образуем последовательность

$$F_n(z) = \sum_{\nu=1}^{q_n} P_{n\nu}(z) e^{\lambda_\nu z} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2}$$

конечных линейных комбинаций функций системы (1).

Л. Шварц в работе ([1]) показал, что если все λ_ν — действительные числа, $m_\nu = 1$, последовательность (2) равномерно сходится на $[-qi, qi]$ и ее предельная функция $F(z)$ регулярна на отрезке $[-qi, qi]$, то тогда $F(z)$ регулярна на всей мнимой оси. Если λ_ν — комплексные, то без дополнительных условий на последовательность (2) нельзя утверждать, что $F(z)$ будет регулярной на всей оси.

А. Ф. Леонтьев в работе ([2]) доказал следующую теорему.

Пусть последовательность (2) *равномерно сходится на любом конечном интервале мнимой оси. Если предельная функция $F(z)$ регулярна на отрезке $[-qi, qi]$, то функция $F(z)$ является аналитической в некоторой вертикальной полосе.*

Следуя рассуждениям А. Ф. Леонтьева, можно было бы получить и следующий результат. Пусть последовательность (2) равномерно сходится внутри конечного интервала мнимой оси (ai, bi), $a < -q$, $b > q$. Если предельная функция $F(z)$ регулярна на $[-qi, qi]$, то она регулярна и на интервале $(ai + qi, bi - qi)$.

В настоящей заметке отмечается, что в указанных условиях функция $F(z)$ будет на самом деле регулярной не только в интервале $(ai + qi, bi - qi)$, но и в интервале (ai, bi).

Для доказательства этого факта пришлось обобщить один результат Л. Шварца ([1]).

1. Пусть $\{\mu_k\}$ — последовательность комплексных чисел, среди которых могут появляться и числа конечной кратности, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} |\arg \mu_k| \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \\ \sum \frac{1}{|\mu_k|} < \infty \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$b(z) = \frac{B(z+1)}{(2+z)^2},$$

где $B(z)$ — произведение Бляшке для правой полуплоскости:

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \dfrac{z}{\mu_k + 1}}{1 + \dfrac{z}{\bar{\mu}_k + 1}},$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} b(z)\, e^{zt}\, dz,$$

$$\omega(\mu, f) = -\int_0^{\infty} \psi(t) \left[\int_0^t f(t-\eta)\, e^{-\mu\eta}\, d\eta \right] dt,$$

где $f(x) \in L(0, \infty)$. Функция $\omega(\mu, f)$ регулярна в правой полуплоскости.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\varphi(z) = z^p e^{-\mu_k z}$, *где* p *— целое число меньше кратности* μ_k. *Вычет функции*

$$\frac{\omega(\mu, \varphi)}{b(\mu)}\, e^{-\mu z},$$

как функции переменного μ, *равен нулю во всех нулях* $b(\mu)$, *отличных от* μ_k, *и равен* $z^p e^{-\mu_k z}$ *в точке* $\mu = \mu_k$.

Через $\overset{+}{P}(z)$ обозначим конечный линейный агрегат функций $\{z^p e^{-\mu_k z}\}$ $(k = 1, 2, \cdots;\ p = 0, 1, \cdots, l_k - 1)$, где l_k — кратность числа μ_k.

Используя лемму 1 и оценку снизу для произведения Бляшке (см. ([3]), стр. 115), получаем следующее интегральное представление

$$\overset{+}{P}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\mu, \overset{+}{P})}{b(\mu)}\, e^{-\mu z}\, d\mu, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_1, \tag{4}$$

где φ_1 — сколь угодно близкое к φ_0, $\varphi_0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, а L — бесконечный контур, идущий из бесконечности по лучу $\arg \mu = \varphi_1$. До точки нуль, затем по лучу $\arg \mu = -\varphi_1$ до бесконечности.

Исходя из интегрального представления (4) доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть последовательность комплексных чисел удовлетворяет условиям* (3) *и пусть последовательность конечных линейных агрегатов* $\{\overset{+}{P}_n(z)\}$ *сходится в метрике* $L(A, \infty)$, $-\infty < A < \infty$. *Тогда она в угле* $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ *— любые, сходится равномерно.*

2. Рассмотрим последовательность комплексных чисел $\{\mu_k\}$ $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$, среди которых могут появляться и числа конечной кратности, причем числа с положительными индексами лежат в угле $\arg \mu| \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$, а числа с отрицательными индексами — в угле $|\arg|(-\mu)| < \varphi_0$.

Введем следующие обозначения:

$$P(z) = \sum_{k \neq 0} Q_k(z) e^{-\mu_k z},$$

$$\overset{+}{P}(z) = \sum_{k > 0} Q_k(z) e^{-\mu_k z}, \qquad \overset{-}{P}(z) = \sum_{k < 0} Q_k(z) e^{-\mu_k z},$$

где $Q_k(z)$ — полином степени не выше $l_k - 1$ (l_k — кратность числа μ_k), причем $Q_k(z) \equiv 0$ для больших по модулю k.

По схеме Л. Шварца, приведенной в работе ([1]), доказывается следующая

Лемма 3. *Пусть* $\sum\limits_{k \neq 0} 1/|\mu_k| < \infty$. *Тогда имеют место следующие неравенства*

$$\|\overset{+}{P}\|_{L(A, \infty)} \leqslant C \|P\|_{L(A, B)}, \qquad \|\overset{-}{P}\|_{L(-\infty, B)} \leqslant C \|P\|_{L(A, B)},$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от последовательности $\{\mu_k\}$ *и интервала* $[A, B]$ $-\infty < A < B < \infty$.

При доказательстве используются интегральное представление (4), лемма 2 и некоторые результаты из ([4]).

Комбинируя лемму 2 с леммой 3, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть последовательность комплексных чисел* $\{\mu_k\}$ $k = \pm 1, \pm 2, \cdots$, *среди которых могут появляться и числа конечной кратности, удовлетворяет условиям:*

$$\left.\begin{array}{l} |\arg \mu_k| \leqslant \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \quad \text{при } k > 0 \\ |\arg(-\mu_k)| \leqslant \varphi_0 \quad \text{при } k < 0 \\ \sum\limits_{k \neq 0} 1/|\mu_k| < \infty \end{array}\right|$$

Если последовательность $\{P_n(z)\}$ *конечных линейных комбинаций функций системы* $\{z^p e^{-\mu_k z}\}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \cdots; p = 0, 1, \cdots, l_k - 1$, l_k — *кратность числа* μ_k *сходится в метрике* $L(A, B)$, $-\infty < A < B < \infty$, *то тогда последовательности* $\{\overset{+}{P}_n(z)\}$ *и* $\{\overline{P}_n(z)\}$ *сходятся равномерно соответственно в углах* $|\arg(z - A - \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$ *и* $|\arg(-z + B + \varepsilon)| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0 - \varepsilon$, *где* $\varepsilon > 0$ — *любое.*

Теорема 1 в случае действительных и простых (не кратных) $\{\mu_k\}$ была установлена Л. Шварцем ([1]).

Используя некоторые результаты А. Ф. Леонтьева из работы ([2]) и теорему 1, уже можно доказать отмеченное в начале заметки утверждение, которое мы формулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть система* $\{z^p e^{-\lambda_\nu z}\}$, $\nu = 1, 2, \cdots$; $p = 0, 1, \cdots m_\nu - 1$, *не полна в* $C[-qi, qi]$, $0 < q < \infty$, *где* λ_ν — *комплексные числа, а* m_ν — *целые положительные числа. Предположим, что последовательность* (2) *конечных линейных комбинаций функций из этой системы равномерно сходится на интервале* (ai, bi), $a < -q$, $b > q$. *Если предельная функция* $F(z)$ *этой последовательности регулярна на отрезке* $[-qi, qi]$, *то она регулярна и на интервале* $(ai\ bi)$.

Само доказательство ввиду его громоздкости не приводим.

В заключение выражаю благодарность А. Ф. Леонтьеву за постановку задачи и ряд ценных указаний.

Математический институт им В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

Դիրիխլեի բազմանդամներով մոտարկելի ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակման մասին

Դիցուք $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu, \cdots$ *կոմպլեքս թվերի հաջորդականություն է, իսկ* $m_1, m_2, \cdots, m_\nu, \cdots$ *ամբողջ դրական թվերի հաջորդականություն: Դիտարկվում է ինտերվալի վրա ոչ լրիվ ֆունկցիաների* (1) *սիստեմը: Բերվում են երկու թեորեմներ այդ սիստեմի ֆունկցիաների գծային կոմբինացիաների միջոցով մոտարկելի ֆունկցիաների անալիտիկ շարունակման վերաբերյալ:*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *L. Schwartz* Etude des sommes d'exponentielles 1959, Actualites Scientifiques et Industrilles. [2] *А. Ф. Леонтьев*, Изв. АН СССР, серия матем., 29 (1965), 269—328. [3] *R. P. Jr. Boas*, Entire Functions, New York, 1954. [4] *А. Ф. Леонтьев*, Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXXIX, 1951.