ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLII 1966 2

МАТЕМАТИКА

Э. М. Кегеян

О граничном поведении неограниченных аналитических функций, заданных в круге

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 29/VI 1965)

1°. Пусть D и S — соответственно единичный круг и единичная окружность в комплексной плоскости z.

В работе (1) Лехто доказал, что для каждой измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ существует аналитическая в D функция, радиальные граничные значения которой совпадают с $\varphi(\xi)$ почти всюду на S.

Пусть $\mu(r)$ — заданная функция в промежутке $0 \leqslant r < 1$, удовлетворяющая условиям

$$\mu(0) > 0,\ \mu'(r) > 0 \quad \text{при } 0 \leqslant r < 1$$
$$\lim_{r \to 1} \mu(r) = +\infty. \tag{1}$$

Обозначим через $H(\mu, D)$ — класс аналитических в D функций $f(z)$, удовлетворяющих в D неравенству

$$|f(z)| \leqslant \mu(|z|).$$

Целью настоящей работы является доказательство следующего предложения.

Теорема. *Для каждой заданной и измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ можно найти функцию $\Phi(z)$ из класса $H(\mu, D)$, радиальные граничные значения которой совпадают с $\varphi(\xi)$ почти всюду на S.*

2°. Сначала докажем следующее предложение.

Для каждого положительного числа $\eta > 0$ в любом классе $H(\mu, D)$ можно найти функцию $\Phi_\eta(z)$ такую, что

1) радиальные граничные значения $Re\,\Phi_\eta(re^{i\theta})$ были бы равны $+\infty$ почти всюду на S;

2) на некотором множестве $U \subset [0, 2\pi]$, с мерой больше $2\pi - \eta$,

$$\inf_{0 \leqslant r < 1} Re\,\Phi_\eta(re^{i\theta}) \geqslant 0.$$

Действительно, для каждого k построим на S нигде не плотное замкнутое множество E_k, такое, что

$$\operatorname{mes} E_k > 2\pi - \frac{\eta}{2^k}. \tag{3}$$

Далее обозначим через

$$\mu_k(r) = \frac{\mu(r)}{2^k}. \tag{4}$$

Рассмотрим круг $|z| \leqslant 1 - \frac{1}{2^k}$ и присоединим к нему все отрезки вида

$$\theta \in E_k$$

$$1 - \frac{1}{2^k} \leqslant r \leqslant 1.$$

Полученное замкнутое подмножество круга $\bar{D}$ обозначим T_k и на нем определим функцию $\varphi_k(z)$ следующим образом

$$\varphi_k(z) = \begin{cases} \dfrac{\mu_k(0)}{2} & \text{при } |z| \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^k} \\ \dfrac{\mu_k(0)}{2} + 2^k\left(r - 1 + \dfrac{1}{2^k}\right)\left(1 - \dfrac{\mu_k(0)}{2}\right) & \text{при } 1 - \dfrac{1}{2^k} < |z| \leqslant 1. \\ & \text{и } z \in T_k \end{cases} \tag{5}$$

Так как замкнутое множество T_k не разделяет плоскость и функция $\varphi_k(z)$ непрерывна на нем и аналитическая во вутренних его точках, то по теореме С. Н. Мергеляна ([2]) существует полином $P_k(z)$, такой, что

$$|\varphi_k(z) - P_k(z)| < \frac{\mu_k(0)}{4} \text{ при } z \in T_k. \tag{6}$$

Теперь возьмем натуральное число m_k настолько большим, чтобы в каждой точке z круга D выполнялось неравенство

$$|P_k(z^{m_k})| \leqslant \mu_k(|z|). \tag{7}$$

Введем обозначение

$$Q_k(z) = P_k(z^{m_k}).$$

Если обозначить образ множества E_k при отображении $w = z^{m_k}$ — через U_k, то из (3), (5), (6) и (7) будет видно, что полином $Q_k(z)$ и замкнутое нигде не плотное множество U_k удовлетворяют следующим условиям

$$\begin{aligned} &1.\ \operatorname{mes} U_k > 2\pi - \frac{\eta}{2^k} \\ &2.\ \operatorname{Re} Q_k(e^{i\theta}) > 1 - \frac{\mu_k(0)}{4} \quad \text{при } \theta \in U_k \\ &3.\ |Q_k(z)| \leqslant \mu_k(|z|) \qquad \text{при } z \in D \\ &4.\ \operatorname{Re} Q_k(re^{i\theta}) > 0 \qquad \text{при } \theta \in U_k. \end{aligned} \tag{8}$$

Определим функцию $\Phi_\eta(z)$ как сумму полиномов $Q_k(z)$:

$$\Phi_\eta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(z). \tag{9}$$

Из (8) и (4) следует, что этот ряд равномерно сходится внутри круга D. Следовательно, его сумма — $\Phi_\eta(z)$ — будет аналитической в D функцией, удовлетворяющей неравенству

$$|\Phi_\eta(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(|z|) = \mu(|z|). \tag{10}$$

Допустим

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Очевидно

$$\operatorname{mes} R = 2\pi.$$

Если $\theta_0 \in R$, то, начиная с некоторого номера — $k > n_0$, $\theta_0 \in U_k$.

Обозначим

$$M = \min_{0<r<1} \left\{ \sum_{k=1}^{n_0-1} \operatorname{Re} Q_k(re^{i\theta_0}) \right\}$$

и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, а N — целое число больше $\ln \frac{1}{\varepsilon} - M$.

Учитывая (8) и (9), получим

$$\operatorname{Re} \Phi_\eta(re^{i\theta_0}) > \sum_{k=1}^{n_0-1} \operatorname{Re} Q_k(re^{i\theta_0}) + \sum_{k=n_0}^{n_0+2N} \operatorname{Re} Q_k(re^{i\theta_0}).$$

Правая часть этого неравенства при $r = 1$ больше, чем $M + 2N\left(1 - \frac{\mu_{n_0}(0)}{4}\right) > M + N > \ln \frac{1}{\varepsilon}$, следовательно, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при $1 - \delta < r < 1$

$$\operatorname{Re} \Phi_\eta(re^{i\theta_0}) < \ln \frac{1}{\varepsilon}, \tag{11}$$

т. е. радиальные граничные значения функции $Re\,\Phi_\eta(z)$ п. в. на S равны $+\infty$.

Наконец, обозначим

$$U = \prod_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Из (8) имеем

$$\operatorname{Re} \Phi_\eta(re^{i\theta}) \geqslant 0 \qquad \text{при } \theta \in U$$

и

$$\operatorname{mes} U > 2\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^k} = 2\pi - \eta.$$

3°. Покажем что

Для каждого положительного числа $\eta>0$ в любом классе $H(\mu, D)$ можно найти функцию $\Psi_\eta(z)$, радиальные граничные значения которой равны 1 почти везде на S, и такую, что на некотором множестве $F\subset[0, 2\pi]$ с мерой больше, чем $2\pi-\eta$,

$$\sup_{0<r<1}|\Psi_\eta(re^{i\theta})|\leqslant 2.$$

На самом деле, пусть r_1 — наименьшее из тех r, для которых $\mu(r)<2$. Определим функцию $\mu^*(r)$, удовлетворяющую условиям (1), и такую, что

$$\mu^*(r)<\frac{\mu(r)}{e^2} \qquad \text{при } r<r_1 \tag{12}$$

$$\mu^*(r)>\frac{\ln\mu(r)}{e^2} \qquad \text{при } r\geqslant r_1.$$

Согласно 2°, для $\eta>0$ можно найти функцию $\Phi_\eta(z)$ из класса $H(\mu^*, D)$, удовлетворяющую условию 2.2.

Функция

$$\Psi_\eta(z)=1-\exp\{-\Phi_\eta(z)\}$$

и является требуемой. Действительно, так как

$$|\Psi_\eta(z)|=\left|1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-\Phi_\eta(z)]^n}{n!}\right|<|\Phi_\eta(z)|\exp\{|\Phi_\eta(z)|\}<$$

$$<\mu^*(r)\exp\{\mu^*(r)\}<\mu(r),$$

то $\Psi_\eta(z)\in H(\mu, D)$. Легко проверяются и остальные свойства функции $\Psi_\eta(z)$.

4° Пусть $\varphi(\xi)$ — произвольная измеримая на S функция. Для всех пар чисел $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ в каждом классе $H(\mu, D)$ можно найти функцию $G(z)$, такую, что

1. Радиальные граничные значения $G(z)$ существуют почти всюду на S. Обозначим их через $g(\xi)$.
2. На некотором множестве T с мерой, большей $2\pi-\delta$,

а) $$|\varphi(\xi)-g(\xi)|<\varepsilon;$$

б) $$\sup_{0<r<1}|G(r\xi)|<2(|\varphi(\xi)|+\varepsilon).$$

Действительно, по теореме Лехто [1] можно найти аналитическую в D функцию $F(z)$, радиальные граничные значения которой почти во всех точках S совпадают с $\varphi(\xi)$.

Берем $\gamma>0$ настолько малое, что

$$|F[(1-\gamma)e^{i\theta}]-\varphi(e^{i\theta})|<\varepsilon$$

на некотором замкнутом множестве T_1 с мерой, большей $2\pi-\dfrac{\delta}{2}$.

Функция $F[(1-\gamma) re^{i\theta}]$ непрерывна на $\overline{D}$. Следовательно, существует $0<r_1<1$, такое, что

$$|F[(1-\gamma) re^{i\theta}]| - \varphi(e^{i\theta})| < \varepsilon$$

при $\theta \in T_1$ и $r_1 < r < 1$.

Пусть

$$M = \max_{z \in \overline{D}} |F[(1-\gamma) z]|,$$

Для $\eta = \frac{\delta}{2}$, согласно 3°, можно найти функцию $\Psi_{\frac{\delta}{2}}(z)$ из класса $H\left(\frac{\mu(r)}{M}; D\right)$, такую, чтобы

1. Ее радиальные граничные значения существовали бы на некотором множестве T_2 полной меры: $\text{mes}\, T_2 = 2\pi$.

2. На некотором множестве T_3 с мерой, большей $2\pi - \frac{\delta}{2}$,

$$\sup_{0<r<1} |\Psi_{\frac{\delta}{2}}(re^{i\theta})| \leqslant 2.$$

Обозначим $G(z) = F[(1-\gamma) z]\, \Psi_{\frac{\delta}{2}}(z)$. Нетрудно видеть, что она удовлетворяет всем вышеупомянутым требованиям, если взять $T = T_1 \times \times T_2 \cdot T_3$.

5°. Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы. С этой целью возьмем последовательности чисел $\{\varepsilon_k > 0\}$ и $\{\delta_k > 0\}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty \quad \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < +\infty. \tag{13}$$

Согласно 4°, для функции $\varphi(\xi)$ и для пар чисел ε_1 и δ_1 в классе $H\left(\frac{\mu(r)}{2}; D\right)$ можно найти функцию $G_1(z)$, имеющую почти всюду на S конечные радиальные граничные значения. Обозначим их $g_1(\xi)$. При этом существует некоторое множество $T_1 \subset S$ с мерой, большей, чем $2\pi - \delta_1$, на котором выполняются следующие условия:

а) $$|\varphi(\xi) - g_1(\xi)| < \varepsilon_1;$$

б) $$\sup_{0<r<1} |G_1(r\xi)| < 2(|\varphi(\xi)| + \varepsilon_1). \qquad \text{при } \xi \in T_1.$$

Пусть $g_1^*(\xi) = g_1(\xi)$ для тех точек $\xi \in S$, где радиальные граничные значения $G_1(z)$ существуют и конечны. Остальные точки окружности S обозначим A_1, принимая на нем $g_1^*(\xi) = 0$. Имеем $\text{mes}\, A_1 = 0$.

Функция $\varphi(\xi) - g_1^*(\xi)$ определена и измерима на S. Аналогично вышесказанному для функции $[\varphi(\xi) - g_1^*(\xi)]$ и для чисел ε_2 и δ_2 построим функции $G_2(z)$ из класса $H\left(\frac{\mu(r)}{2^2}; D\right)$ и $g_2^*(z)$, а также множества T_2 и A_2.

Пусть уже определена функция $g^*_{n-1}(\xi)$. Для функции $[\varphi(\xi) - \sum_{k=1}^{n-1} g^*_k(\xi)]$ и для пар чисел ε_n и δ_n мы, согласно 4° найдем фунцкию $G_n(z)$ из класса $H\left(\frac{\mu(r)}{2^n} : D\right)$, имеющую конечные радиальные граничные значения почти всюду на S.
Обозначим их $g_n(\xi)$. При этом существует некоторое множество $T_n \subset S$ с мерой, большей, чем $2\pi - \delta_n$:

$$\operatorname{mes} T_n > 2\pi - \delta_n, \tag{14}$$

на котором выполняются следующие условия:

а) $$\left|\varphi(\xi) - \sum_{k=1}^{n-1} g^*_k(\xi) - g_n(\xi)\right| < \varepsilon_n;$$

(15)

б) $$\sup_{0<r<1} |G_n(r\xi)| < 2\left(\left|\varphi(\xi) - \sum_{k=1}^{n-1} g^*_k(\xi)\right| + \varepsilon_n\right).$$

Пусть $g^*_n(\xi) = g_n(\xi)$ для тех точек $\xi \in S$, где радиальные граничные значения $G_n(z)$ существуют и конечны. Множество остальных точек окружности S обозначим A_n, принимая на нем $g^*_n(\xi) = 0$. Имеем

$$\operatorname{mes} A_n = 0. \tag{16}$$

Так как $G_n(z) \in H\left(\frac{\mu(r)}{2^n}; D\right)$, то ряд с членами $G_n(z)$ сходится равномерно внутри D и его сумма

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(z)$$

принадлежит классу $H(\mu, D)$.

Нам остается доказать, что радиальные граничные значения $G(z)$ почти всюду на S совпадают с $\varphi(\xi)$.

С этой целью рассмотрим множество

$$R = \left(S - \sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{m=n}^{\infty} T_m.$$

Из (13), (14) и (16) следует, что

$$\operatorname{mes} R = 2\pi. \tag{18}$$

При $\xi_0 \in R$, $g^*_n(\xi_0) = g_n(\xi_0)$ для всех n. И, кроме того, $\xi_0 \in T_n$, начиная с некоторого номера n_0. Значит, при $n > n_0$ отсюда и из (15а) следует, что

$$|g_n(\xi_0)| < \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{19}$$

а из (15б) — что

$$\sup_{0<r<1} |G_n(r\xi_0)| < 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n. \tag{20}$$

Так что, если $\varepsilon > 0$ произвольное число, то из (13) можно взять $m_0 > n_0$ настолько большим, чтобы

$$\sum_{k=m_0}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{21}$$

Тогда из (17) и (20) будем иметь

$$\sup_{0<r<1} |G(r\xi_0) - \sum_{n=1}^{m_0} G_n(n\xi_0)| < \sum_{n=m_0+1}^{\infty} 3\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

И так как для всех n

$$\lim_{r\to 1} G_n(r\xi_0) = g_n(\xi_0),$$

то можно найти $\eta > 0$ такое, чтобы при $1 - r < \eta$ выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} G_n(r\xi_0) - g_n(\xi_0) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{23}$$

Из (15а) при $\xi = \xi_0$, а также из (22), (23) и (21) окончательно получим

$$|G(r\xi_0) - \varphi(\xi_0)| < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε этим и завершается доказательство теоремы.

Замечание. Вышеприведенные рассуждения позволяют распространить утверждение теоремы на тот случай, когда $\varphi(\xi)$ задана и измерима на некотором множестве $E \subset S$, а на остальной части, т. е. на $C_s E$ $\varphi(\xi) = \infty$.

Как применение вышедоказанной теоремы формулируем следующий результат.

Для каждой измеримой на S функции $\varphi(\xi)$ (она может равняться ∞ на множестве положительной меры). Существует аналититическая функция $\Phi(z)$ такая, что

1. $\iint_D |\Phi(z)|^2 d\sigma < \infty$ (где $d\sigma$ — элемент площади).

2. радиальные граничные значения $\Phi(z)$ совпадают с $\varphi(\xi)$ почти всюду на S.

Ереванский государственный
университет

Է. Մ. ՔԵՀՅԱՆ

Միավոր շրջանում տրված անսահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների եզրային վարքի մասին

Թող D-ն և S-ը լինեն համապատասխանաբար միավոր շրջանը և նրա եզրագիծը, իսկ $\mu(r)$-ը՝ $(0,1)$ միջակայքում տրված իրական, դրական և մոնոտոն աճելով ∞-ի ձգտող ֆունկցիա։ Նշանակենք $H(\mu, D)$-ով D-ում տրված անալիտիկ ֆունկցիաների դասը, որոնք մոդուլով չեն գերազանցում $\mu(r)$-ին։

Ներկա հոդվածը հիմնականում ապացուցում է.

ԹԵՈՐԵՄ. S-ի վրա տրված ցանկացած չափելի $\varphi(\xi)$ ֆունկցիայի համար ամեն մի $H(\mu, D)$ դասում կարելի է գտնել մի ֆունկցիա, որի շառավիղային սահմանային արժեքները համընկնում են $\varphi(\xi)$-ի հետ համարյա ամենուրեք S-ի վրա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Лехто.* On the first boundary value problem for functions harmonic in the unit cicle. Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, 210 (1955), 1—26. [2] *С. Н. Мергелян.* Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, VII, вып. 2 (1952).