ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLII 1966 1

МАТЕМАТИКА

Р. Л. Шахбагян

Интегральные уравнения в полупространстве

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Александряном 9/X 1965)

В полупространстве $R_n^+ = R_n\,(x_n \geqslant 0)$ n-мерного евклидова пространства рассмотрим уравнения вида

$$\mathfrak{M}_0 u \equiv u(x) - \int\limits_{R_n^+} K_0(x-y)\,u(y)\,dy = f(x) \quad (x_n \geqslant 0), \tag{1}$$

$$\mathfrak{M} u \equiv u(x) - \int\limits_{R_n^+} K(x, x-y)\,u(y)\,dy = f(x) \quad (x_n \geqslant 0). \tag{2}$$

Теория интегральных уравнений (1), а также систем таких уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов и принадлежащими пространству $L_1(-\infty, +\infty)$ развита М. Г. Крейном и И. Ц. Гохбергом ([1,2]). Решающей идеей при постановке задач для уравнений вида (1), (2) является, впервые использованная Н. Винером и Е. Хопфом, а впоследствии широко развитая М. Г. Крейном ([1]), И. Ц. Гохбергом ([3]), М. И. Вишиком и Г. И. Эксиным ([4]), так называемая идея „факторизации" функции $\overline{K}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, заключающаяся в возможности представления ее в виде произведения двух функций $\overline{K}_+(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \times \overline{K}_-(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, где $\overline{K}_+$ и $\overline{K}_-$ — некоторые функции, аналитически продолжающиеся по переменной ξ_n, соответственно, в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\xi_n > 0$ и $\mathrm{Im}\,\xi_n < 0$.

В настоящей заметке устанавливается нормальная разрешимость уравнений (1), (2) при некоторых условиях, налагаемых на ядра $K(x, z)$, то есть доказывается тот факт, что однородная задача имеет лишь конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача разрешима лишь при конечном числе дополнительных условий, налагаемых на правые части.

Решается также вопрос об индексе соответствующих операторов.

Обозначим через $L_1(R_n)$ пространство комплекснозначных измеримых абсолютно интегрируемых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{L_1} = \int_{R_n} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Через $L_1^+ = L_1(R_n^+)$ будем обозначать подпространство всех $f \in L_1(R_n)$, обращающихся в нуль при $x_n < 0$, с нормой

$$\|f\|_{L_1^+} = \int_{R_n^+} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Далее, через $L_2(R_n)$ обозначим пространство комплекснозначных измеримых функций $f(x)$ таких, что

$$\|f\|_0 = \left(\int_{R_n} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

а через $L_2^+ = L_2(R_n^+)$ — подпространство всех $f \in L_2(R_n)$, обращающихся в нуль при $x_n < 0$, с нормой

$$\|f\|_0^+ = \left(\int_{R_n^+} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть ядро $K_0(x) \in L_1(R_n)$. Обозначим его преобразование Фурье через $\widetilde{K}_0(\xi)$:

$$\widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) = \int_{R_n} e^{i(\xi, x)} K_0(x)\,dx,$$

где

$$\xi' = (\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}), \qquad (\xi, x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i.$$

Предположим, далее, выполненным условие:

$$\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = 1 - \widetilde{K}_0(\xi', \xi_n) \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi \in \widetilde{R}_n \tag{3}$$

($\widetilde{R}_n$ — n-мерное пространство точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$).

Теорема 1. *Пусть $\widetilde{K}_0(\xi)$ удовлетворяет условию (3). Тогда при любом фиксированном ξ' имеет место представление*

$$\widetilde{K}_1(\xi', \xi_n) = \widetilde{K}_+(\xi', \xi_n)\,\widetilde{K}_-(\xi', \xi_n) \quad (-\infty < \xi_n < +\infty), \tag{4}$$

где функции $\widetilde{K}_+(\xi)$, $\widetilde{K}_-(\xi)$ аналитически продолжаются, соответственно, в полуплоскости $\operatorname{Im} \xi_n > 0$ и $\operatorname{Im} \xi_n < 0$ и отличны там от нуля. Факторизация (4) единственна.

Факторизация (4) позволяет перейти к решению уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (3). Тогда при любой правой части $f(x) L_2^+$ уравнение (1) имеет одно и только одно решение $u(x)$, принадлежащее пространству L_2^+.*

Доказательство. Перепишем уравнение (1) в виде

$$P^+\left(u_+(x) - \int\limits_{R_n^+} K_0(x-y)\, u_+(y)\, dy\right) = f(x), \qquad (1^*)$$

где P^+ — оператор сужения на полупространство R_n^+, $u_+(x) \equiv u(x)$ при $x_n \geqslant 0$ и $u_+(x) \equiv 0$ при $x_n < 0$.

Продолжим функцию $f(x)$ каким-нибудь образом на все R_n, требуя только, чтобы это продолжение $lf(x)$ принадлежало пространству $L_2(R_n)$. Заменим (1*) эквивалентным ему уравнением

$$u_+(x) - \int\limits_{R_n^+} K_0(x-y)\, u_+(y)\, dy = lf(x) + u_-(x), \qquad (5)$$

где $u_-(x)$ — некоторая функция, принадлежащая пространству L_2^-, то есть $u_-(x) \equiv 0$ при $x_n > 0$. Произведя в уравнении (5) преобразование Фурье и используя факторизацию (4), получим

$$\tilde{K}_+(\xi', \xi_n)\, \tilde{u}_+(\xi', \xi_n) = \frac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi', \xi_n)} + \frac{\tilde{u}_-(\xi', \xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi', \xi_n)}, \qquad (6)$$

где через $\widetilde{lf}$, $\tilde{u}_+$, $\tilde{u}_-$ обозначено, соответственно, преобразование Фурье функций lf, u_+, u_-. Функцию $F^{-1} \dfrac{\widetilde{lf}(\xi)}{\tilde{K}_-(\xi)} \in L_2$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье, можно представить в виде

$$F^{-1} \frac{\widetilde{lf}(\xi)}{\tilde{K}_-(\xi)} = \Theta(x_n)\, F^{-1} \frac{\widetilde{lf}(\xi)}{\tilde{K}_-(\xi)} + (1 - \Theta(x_n))\, F^{-1} \frac{\widetilde{lf}(\xi)}{\tilde{K}_-(\xi)} \qquad (7)$$

($\Theta(x_n)$ — функция Хевисайда). После преобразования Фурье выражение (7) примет следующий вид:

$$\frac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi', \xi_n)} = \Pi^+ \frac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi', \xi_n)} + \Pi^- \frac{\widetilde{lf}(\xi', \xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi', \xi_n)}, \qquad (8)$$

где через Π^+ обозначено преобразование Фурье оператора умножения на $\Theta(x_n)$: $\Pi^+ \tilde{\Phi}(\xi', \xi_n) = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\tilde{\Phi}(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i0 - \eta_n}\, d\eta_n$. Π^- определяется аналогично, с заменой $i0$ на $-i0$. Подставляя (8) в (6) и произведя элементарные преобразования, получим

$$\tilde{K}_+(\xi',\xi_n)\,\tilde{u}_+(\xi',\xi_n) - \Pi^+ \frac{\tilde{lf}(\xi',\xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi',\xi_n)} =$$

$$= \Pi^- \frac{\tilde{lf}(\xi',\xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi',\xi_n)} + \frac{\tilde{u}_-(\xi',\xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi',\xi_n)} = P(\xi',\xi_n). \tag{9}$$

В левой части (9) стоит функция, аналитически продолжающаяся в полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_n > 0$, справа — функция, аналитически продолжающаяся в полуплоскость $\operatorname{Im}\xi_n < 0$. Следовательно, согласно теореме Лиувилля, $P(\xi',\xi_n) = 0$ при почти всех ξ'.

Таким образом, получаем, следующую формулу для решения уравнения (1)

$$u_+(x) = F^{-1}\left(\frac{1}{\tilde{K}_+(\xi',\xi_n)} \Pi^+ \frac{\tilde{lf}(\xi',\xi_n)}{\tilde{K}_-(\xi',\xi_n)}\right). \tag{10}$$

Формула (10) выведена в предположении существования решения уравнения (1*). Можно показать, что эта формула на самом деле дает решение уравнения (1). Единственность очевидна. Из формулы (10) вытекает, что оператор $\mathfrak{M}_0$ осуществляет гомеоморфное отображение пространства L_2^- на себя.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть ядро $K(x,z)$ уравнения (2) допускает разложение в ряд:*

$$K(x,z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x)\,K_i(z),$$

причем функции $a_i(x)$ и $K_i(z)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ удовлетворяют следующим условиям:

a) *функции $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ непрерывны по x во всем R_n и равномерно ограничены, то есть*

$$\max_{x \in R_n} |a_i(x)| \leqslant C, \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

где C — некоторая постоянная;

в) *существуют конечные пределы*

$$\lim_{|x|\to\infty} a_i(x) = a_i(\infty) < \infty \qquad (i = 1, 2, \cdots);$$

c) *функции $K_i(z)$ $(i = 1, 2, \cdots)$ принадлежат $L_1(R_n)$, причем сходится ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|K_i\|_{L_1} < +\infty;$$

d) *функция $K_\infty(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(\infty)\,K_i(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.*

Тогда оператор $\mathfrak{M}$, действующий в пространстве L_2^+ является Ф-оператором.

Идея доказательства теоремы заключается в следующем: оператор $\mathfrak{M}$ представляется в виде

$$\mathfrak{M}u \equiv u(x) - \sum_{l=1}^{\infty} a_l(\infty) \int\limits_{R_n^+} K_l(x-y)\,u(y)\,dy -$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} (a_l(x) - a_l(\infty)) \int\limits_{R_n^+} K_l(x-y)\,u(y)\,dy \equiv (I - A_1)\,u(x) - A_2 u(x),$$

где

$$A_1 u \equiv \sum_{l=1}^{\infty} a_l(\infty) \int\limits_{R_n^+} K_l(x-y)\,u(y)\,dy,$$

$$A_2 u \equiv \sum_{l=1}^{\infty} (a_l(x) - a_l(\infty)) \int\limits_{R_n^+} K_l(x-y)\,u(y)\,dy.$$

Оператор $I - A_1$ обратим по условию. Можно показать, что оператор A_2 представим в виде суммы операторов вполне непрерывных и операторов, имеющих малую норму, откуда будет следовать теорема.

Следствие. Индекс Ф-оператора $\mathfrak{M}$ равен нулю.

Ниже будет сформулирована теорема, являющаяся обобщением известного результата М. Г. Крейна ([1]), относящегося к уравнению вида

$$Tx \equiv x(t) - \int\limits_0^{\infty} K(t-s)\,x(s)\,ds = f(t) \qquad (0 < t < +\infty),$$

а именно, как показано в ([1]), оператор T, действующий в пространстве E, является Ф-оператором, если выполнены следующие условия:

$$K(t) \in L_1(-\infty, +\infty), \qquad 1 - \tilde{K}(\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < +\infty), \tag{11}$$

$$\nu = ind\,(1 - \tilde{K}(\lambda)) = \frac{1}{2\pi}\,[\arg(1 - \tilde{K}(\lambda))]_{\lambda=+\infty}^{\lambda=-\infty} \leqslant 0, \tag{12}$$

причем индекс оператора T равен $|\nu|$.

Под E понимается одно из следующих пространств:

$$L_p^+\ (p \geqslant 1), \quad C_+^0 \subset C_+ \subset M_+^u \subset M_+^c \subset M_+,$$

где L_p^+ — пространство всех измеримых функций $f(t)$ с конечным интегралом по полуоси от $|f(t)|^p$, M_+ — пространство, сопряженное к пространству L_1^+, состоящее из всех ограниченных функций, M_+^c и M_+^u — подпространства пространства M_+. Первое из этих пространств состоит из всех непрерывных функций, а второе — из всех равномерно непрерывных функций. C_+ обозначает пространство непрерывных функций, имеющих предел на бесконечности. Подпространство всех функций $f(t) \in C_+$, для которых $f(\infty) = 0$ обозначено через C_+^0.

Теорема 4. *Пусть ядро $K(t, z)$ уравнения*

$$Ax = x(t) - \int_0^\infty K(t, t-s)\, x(s)\, ds = f(t) \qquad (0 \leq t < +\infty)$$

удовлетворяет условиям a)—c) *теоремы. 3. Пусть, далее,* $K_\infty(z) = \lim\limits_{t\to\infty} K(t, z)$ *удовлетворяет условиям* (11), (12). *Тогда оператор A, действующий в пространстве E, является Φ-оператором с индексом, равным* $|\nu|$.

Пользуюсь случаем принести глубокую благодарность профессору М. И. Вишику за внимание к моей работе.

Московский энергетический институт

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱԶՅԱՆ

Ինտեգրալ հավասարումները կիսատարածությունում

Սույն հոդվածը նվիրված է կիսատարածությունում ինտեգրալ հավասարումների որոշակի դասերի ուսումնասիրությանը: Ցույց է տրվում, որ (1) հավասարման միջուկը թույլ է տալիս «ֆակտորիզացիա», որից հետո ապացուցվում է, որ այդ հավասարումը ունի միակ լուծում կիսատարածությունում քառակուսով հանրագումարելի ֆունկցիաների դասում: Տրվում է բացահայտ բանաձև այդ լուծման համար:

Այնուհետև ապացուցվում է, որ (2) հավասարմանը համապատասխանող օպերատորը հանդիսանում է Φ-օպերատոր կիսատարածությունում քառակուսով հանրագումարելի ֆունկցիաների դասում և լուծվում է ինդեքսի հարցը:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн*, УМН, XIII, вып. 5 (1958), 3–120. [2] *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, УМН, XIII, вып. 2 (1958), 3–72. [3] *И. Ц. Гохберг*, УМН, XIX, вып. 1 (1964), 71–124. [4] *М. И. Вишик* и *Г. И. Эскин*, УМН, XX, 3 (1965), 99–161.