ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLII 1966 1

МАТЕМАТИКА

И. С. Иохвидов

Дробнолинейные преобразования J-нерастягивающих операторов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/VII 1965)

1. J-нерастягивающие операторы в гильбертовом пространстве нашли широкое применение в теории устойчивости решений канонических систем дифференциальных уравнений ([1]) и в общей теории несамосопряженных операторов ([2–5]). Одним из весьма полезных приемов изучения J-нерастягивающих операторов являются их дробнолинейные преобразования специального вида, впервые, по-видимому, рассмотренные в алгебраическом (конечномерном) случае* В. П. Потаповым ([3]). Его результаты были затем обобщены Ю. П. Гинзбургом ([4, 7, 8]) на случай J-нерастягивающих операторов в гильбертовом пространстве. У обоих этих авторов (как и в ([6])) значительную роль в рассуждениях играют скалярные произведения, нормы, сопряженные операторы, а в случае бесконечномерного (гильбертова) пространства—ограниченность рассматриваемых операторов и задание их во всем пространстве.

Внимательный анализ интересующих нас дробнолинейных преобразований показывает, что они (как и само понятие J-нерастягивающего оператора) сохраняют смысл и в общих банаховых пространствах ([9]). Более того, значительная часть рассуждений носит чисто алгебраический характер и проходит в любых линейных (не нормированных) пространствах. С этих рассуждений мы и начнем.

2. Пусть E — линейное пространство (вообще говоря, бесконечномерное), разложенное в прямую сумму $E = E_+ + E_-$ двух линеалов $E_\pm = P_\pm E$, где $P_\pm$ — соответствующие этому разложению проекторы. Справедливы следующие предложения:

1°. *Если линейный оператор V, действующий в E с некоторого линеала $D(V)$, обладает тем свойством, что существует (однозначно определенный) оператор $(P_+ - P_- V)^{-1}$, то преобразование*

$$U = (P_- - P_+ V)(P_+ - P_- V)^{-1} \tag{1}$$

* Недавно М. Г. Крейн обнаружил, что в статье 1956 года Р. Ботт ([6]), по-видимому, независимо от В. П. Потапова использовал по существу подобного же рода преобразование над конечными J-изометрическими матрицами.

относит оператору V оператор U, обладающий тем свойством, что существуют операторы $(P_+ \pm UP_-)^{-1}$ и $(P_+ \pm P_-U)^{-1}$. При этом преобразование (1) *относит различным операторам V различные операторы U.*

2°. *Пусть линейный оператор U, действующий в E с линеала $D(U)$, обладает тем свойством, что существует $(P_+ - UP_-)^{-1}$. Тогда преобразование*

$$V = (P_+ - UP_-)^{-1}(P_- - UP_+) \tag{2}$$

относит оператору U оператор V, для которого существуют операторы $(P_+ \pm P_-V)^{-1}$ и $(P_+ \pm VP_-)^{-1}$.

Преобразования (1) и (2) оказываются тесно связанными между собой, о чем свидетельствует следующая

Теорема 1. *Пусть V и U — линейные операторы, действующие в пространстве $E = E_+ \dot{+} E_-$ с областей $D(V)$ и $D(U)$ соответственно. Следующие утверждения 1) и 2) равносильны:*

$$1)\ (a)\ U = (P_- - P_+V)(P_+ - P_-V)^{-1};$$
$$(б)\ P_+D(V) \subset (P_+ - P_-V)D(V).$$

$$2)\ (a)\ V = (P_+ - UP_-)^{-1}(P_- - UP_+);$$
$$(б)\ P_+D(U) \subset D(U).$$

В частности, условия *1) (б)* и *2) (б)* необходимы для того, чтобы произвольные операторы U и V были связаны формулами обращения (1) и (2).

3. В дальнейшем неоднократно используется следующая

Лемма [9]. *Пусть T — произвольный линейный оператор, заданный всюду в $E = E_+ \dot{+} E_-$. Следующие три утверждения эквивалентны:*

1) оператор $P_+ - P_-T$ отображает взаимно однозначно E на все E;

2) оператор $P_+ - TP_-$ отображает взаимно однозначно E на все E;

3) оператор P_-TP_- отображает взаимно однозначно E_- на все E_-.

В утверждениях 1) и 2) разности операторов, очевидно, можно заменить их суммами.

Эта лемма позволяет, в частности, выяснить, когда операторы, связанные преобразованиями (1) и (2), оказываются заданными всюду в E.

Теорема 2. *Пусть операторы U и V, действующие в E с линеалов $D(U)$ и $D(V)$ соответственно, связаны формулами обращения (1) и (2). Тогда, если $D(V) = E$, то для того, чтобы $D(U) = E$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $(P_-VP_-)^{-1}$ был однозначно определен всюду в E_-. Если же $D(U) = E$, то для* *того, чтобы и* $D(V) = E$, *необходимо и достаточно, чтобы* $(P_-UP_-)^{-1}$ *был однозначно определен всюду в* E_-.

Разумеется, условия теоремы 2 можно с помощью леммы модифицировать, заменяя их эквивалентными условиями.

Теоремы 1 и 2 можно переписать по-иному с помощью простой замены обозначений: U на $(-V)$ и V на $(-U)$. При этом условия 1) и 2) теоремы 1 соответственно примут вид:

$$1')\ (а)\ V = -(P_- + P_+U)(P_+ + P_-U)^{-1};$$
$$(б)\ P_+D(U) \subset (P_+ + P_-U)D(U).$$

$$2')\ (а)\ U = -(P_+ + VP_-)^{-1}(P_- + VP_+);$$
$$(б)\ P_+D(V) \subset D(V).$$

Это формальное преобразование, оказывается, имеет еще и другой смысл, вскрываемый следующей теоремой:

Теорема 3. *В том и только том случае, когда одновременно* $P_+D(V) \subset D(V)$ *и* $P_+D(U) \subset D(U)$, *все четыре утверждения: 1) и 2) (из теоремы 1) и 1') и 2') равносильны.*

Следствие. *При выполнении условий* $P_+D(V) \subset D(V)$ *и* $P_+D(U) \subset D(U)$ *(или равносильных им условий* $P_+D(V) \subset (P_+ - P_-V)D(V)$ *и* $P_+D(U) \subset (P_+ - P_-U)D(U)$*) формулы*

$$U = (P_- - P_+V)(P_+ - P_-V)^{-1}$$
$$\text{и}\quad U = -(P_+ + VP_-)^{-1}(P_- + VP_+)$$

задают один и тот же оператор. При этом оператор V *восстанавливается по оператору* U *с помощью любой из двух эквивалентных формул*

$$V = (P_+ - UP_-)^{-1}(P_- - UP_+)$$
$$\text{и}\quad V = -(P_- + P_+U)(P_+ - P_-U)^{-1}.$$

Замечание 1. Легко понять, что все приведенные выше предложения можно заменить „двойственными“, поменяв ролями проекторы P_+ и P_- (и, соответственно, подпространства E_+ и E_-).

Замечание 2. Можно, следуя В. П. Потапову (3) и Ю. П. Гинзбургу (7), рассмотреть оператор $J = P_+ - P_-$ и произвольную пару операторов A и B, заданных всюду в E и обладающих свойствами:

$$AB = BA,\quad JA = AJ,\quad JB = BJ,\quad A^2 - B^2 = J.$$

Отправляясь от этой пары A, B, можно было бы всю теорию дробнолинейных преобразований построить на формулах обращения

$$U = (B - AV)(A - BV)^{-1},\qquad V = (A - UB)^{-1}(B - UA)$$

или

$$U = J(A - VB)^{-1}(B - VA)J,\qquad V = J(B - AU)(A - BU)^{-1}J,$$

которые при $A = P_+$, $B = P_-$ переходят в формулы 1) (а), 2) (а) или 1') (а) 2') (а) соответственно, которыми мы и ограничимся, как вполне достаточными для нашей цели.

4. Пусть теперь $E = E_+ \dotplus E_-$ — банахово пространство $E_\pm = P_\pm E$, где $P_\pm$ — ограниченные проекторы. Оператор V с $D(V) \subset E$ называется *J-нерастягивающим* ([9]), если для всех $x \in D(V)$

$$\|P_+ Vx\|^2 + \|P_- x\|^2 \leqslant \|P_- Vx\|^2 + \|P_+ x\|^2. \tag{3}$$

Если положить $J(x) = \|P_+ x\|^2 - \|P_- x\|^2$ $(x \in E)$, то неравенство (3) равносильно записи $J(Vx) \leqslant J(x)$, объясняющей термин „J-нерастягивающий".

В случае, когда для всех $x \in D(V)$ в (3) имеет место равенство, оператор V называется *J-изометрическим*.

Лемма 1 из ([9]) гарантирует для всякого J-нерастягивающего оператора V в E существование оператора $(P_+ - P_- V)^{-1}$. Более того, с помощью теоремы 3 из ([9]) устанавливается.

Теорема 4. *Если J-нерастягивающий оператор V в банаховом пространстве $E = E_+ \dotplus E_-$ замкнут, то оператор $U = (P_- - P_+ V)(P_+ - P_- V)^{-1}$ ограничен и замкнут. Обратно, если замкнут и ограничен оператор U и имеет смысл формула $V = (P_+ - UP_-)^{-1}(P_- - UP_+)$, то оператор V замкнут.*

Однако теорема 4 не выясняет, какими дополнительными свойствами обладает оператор U — дробнолинейное преобразование (1) J-нерастягивающего оператора V. Полной ясности здесь удается достигнуть в том случае, когда Е — гильбертово пространство, а $P_\pm$ — ортопроекторы, т. е. $E = E_+ \oplus E_-$. Используя (3), теоремы 1 и 4, получаем следующий результат.

Теорема 5. *Преобразование (1) осуществляет взаимно однозначное соответствие между всеми J-нерастягивающими операторами V в гильбертовом пространстве $E = E_+ \oplus E_-$, обладающими свойством $P_+ D(V) \subset (P_+ - P_- V) D(V)$, и теми сжатиями U в E ($\|U\| \leqslant 1$), которые обладают свойствами: 1) $P_+ D(U) \subset D(U)$; 2) $(P_+ - UP_-)^{-1}$ существует. При этом обратное преобразование дается формулой (2). В соответствии $V \leftrightarrow U$ J-изометрические операторы V переходят в изометрические U и обратно, замкнутые операторы переходят в замкнутые.*

5. Особую роль в приложениях играет следующий подкласс класса J-нерастягивающих операторов в гильбертовом пространстве E: J-нерастягивающий оператор V в E называется *двусторонним J-нерастягивающим* ([1, 7, 8]), если он определен всюду в E $(D(V) = E)$, ограничен, и сопряженный оператор V^* — также J-нерастягивающий.

Теорема 6. *Для того чтобы J-нерастягивающий оператор V, заданный всюду в гильбертовом пространстве $E = E_+ \oplus E_-$,* *был двусторонним J-нерастягивающим, необходимо выполнение всех и достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий*:

$$1)\ (P_+ - P_-V)E = E;\quad 2)\ (P_+ - VP_-)E = E;\quad 3)\ P_-VE_- = E_-.$$

В терминах преобразования (1) *оператора V эти условия можно заменить эквивалентными условиями, налагаемыми на сжатие U, заданное всюду в E*:

$$1')\ (P_+ - P_-U)E = E;\ 2')(P_+ - UP_-)E = E;\ 3')P_-UE_- = E_-.$$

В доказательстве теоремы 6, помимо леммы и теорем 2 и 5, используются результаты, установленные в [9].

Сопоставление теоремы 6 и следствия из теоремы 3 показывает, что в случае двустороннего J-нерастягивающего оператора справедливы оба варианта формул обращения 1), 2) и 1'), 2'), о которых шла речь в теореме 3.

Теорема 6 покрывает собой и усиливает все ранее известные критерии „двусторонности" [4, 7, 8], а также дает ряд новых. Существенным моментом здесь является то, что в „достаточной" части критериев, устанавливаемых теоремой 6, не требуется, чтобы оператор V был a priori ограниченным. Напротив, его ограниченность является уже следствием выполнения любого из условий 1) — 3) или 1') — 3').

J-изометрический оператор V называется *J-полуунитарным*, если $D(V) = E$, и *J-унитарным*, если $D(V) = VD(V) = E$. J-унитарные операторы образуют подкласс класса двусторонних J-нерастягивающих операторов.

3°. *Для того чтобы J-полуунитарный оператор в гильбертовом пространстве $E = E_+ \oplus E_-$ был J-унитарным, необходимо и достаточно, чтобы $P_+VE_+ = E_+$ и $P_-VE_- = E_-$**.

Теперь теорему 5 можно дополнить следующим образом.

Теорема 5'. *В преобразовании, описанном теоремой 5, двусторонним J-нерастягивающим операторам V отвечают (взаимно однозначно) сжатия U, определенные всюду в E и обладающие тем свойством, что оператор $(P_-UP_-)^{-1}$ однозначно определен всюду в E_-. В частности, J-унитарным операторам V в этом преобразовании отвечают (взаимно однозначно) унитарные операторы U с обратимыми (соответственно в E_+ и E_-) „клетками" P_+UP_+ и P_-UP_-.*

Одесский инженерно-строительный
институт

---

* По существу, это предложение содержалось уже в § 14 работы [10], так как его доказательство в [10] не опиралось на сделанное там предположение: $\dim E_+ < \infty$.

Ի. Ս. ԻՈԽՎԻԴՈՎ

J—չձգող օպերատորների կոտորակագծային ձևափոխություններ

$E = E_+ \oplus E_-$ հիլբերտյան տարածության մեջ, որտեղ $E_\pm = P_\pm E$, իսկ $P_\pm$ ($P_+ + P_- = 1$) օրթոպրոեկտորներ են, դիտարկվում են J—չձգող օպերատորները, որոնք սահմանվում են հետևյալ պայմանով՝

$$\|P_+ Vx\|^2 + \|P_- x\|^2 \leq \|P_- Vx\|^2 + \|P_+ x\|^2 \qquad x \in D(V) \qquad (1)$$

Եթե $D(V) = E$ և V-ի հետ միասին V^*-ը նույնպես J—չձգող է, ապա V-ն կոչվում է երկկողմանի J—չձգող։ Եթե (1)-ում բոլոր $x \in D(V)$ համար տեղի ունի հավասարության նշան, ապա V-ն կկոչվի J—իզոմետրիկ, մասնավորապես, եթե $D(V) = VD(V) = E$, ապա նա կկոչվի J—ունիտար։

Հիմնական արդյունքը.

$$U = (P_- - P_+ V)(P_+ - P_- V)^{-1}$$

կոտորակագծային ձևափոխությունը ստեղծում է փոխմիարժեք համապատասխանություն $P_+ D(V) \subset (P_+ - P_- V) D(V)$ հատկություն ունեցող բոլոր V J—ձգվող օպերատորների և E-ում տված այն սեղմող U ($\|U\| \leq 1$) օպերատորների միջև, որոնք ունեն հետևյալ հատկությունները՝

1) $P_+ D(U) \subset D(U)$, գոյություն ունի $(P_+ - UP_-)^{-1}$։ Ընդ որում հակադարձ ձևափոխությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով

$$V = (P_+ - UP_-)^{-1} (P_- - UP_+)$$

$V \leftrightarrow U$ համապատասխանությունը V J—իզոմետրիկ օպերատորները տանում է U իզոմետրիկ օպերատորների վրա և ընդհակառակը, իսկ փակ օպերատորները տանում է փակերի վրա։

V երկկողմանի J—չձգող օպերատորներին համապատասխանում են U սեղմումները, որոնք որոշված են ամենուրեք և ունեն այն հատկությունը, որ $(P_- UP_-)^{-1}$ օպերատորը միարժեք որոշված է ամենուրեք E-ում։ Մասնավորապես, V J-ունիտար օպերատորներին համապատասխանում են (փոխմիարժեք) U ունիտար օպերատորներ՝ $P_+ UP_+$ և $P_- UP_-$ հակադարձելի «վանդակներով» (համապատասխանաբար E_+-ում և E_--ում)։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн*, Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1964. [2] *М. С. Бродский, М. С. Лившиц*, УМН, 13, 1 (79), 3 (1958). [3] *В. П. Потапов*, Тр. Моск. матем. общ., 4, 125 (1955). [4] *Ю. П. Гинзбург*, ДАН СССР, 117, № 2, 171 (1957). [5] *Ю. П. Гинзбург*, Изв. высш. уч. завед., Математика, № 1 (32), 42 (1962). [6] *R. Bott*, Comm. Pure appl. Math., 9, 171 (1956). [7] *Ю. П. Гинзбург*, J-нерастягивающие аналитические оператор-функции, диссертация, Одесса, 1958. [8] *Ю. П. Гинзбург*, Научн. зап. физ.-матем. ф-та Одесск. пед. ин-та, 22, 1, 13 (1958). [9] *И. С. Иохвидов*, ДАН СССР (1966). [10] *И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн*, Тр. Моск. матем. общ., 5, 367 (1956).