ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLI 1965 5

ГЕОХИМИЯ

В. О. Пароникян

О функции распределения содержаний рудообразующих элементов в теле полезного ископаемого

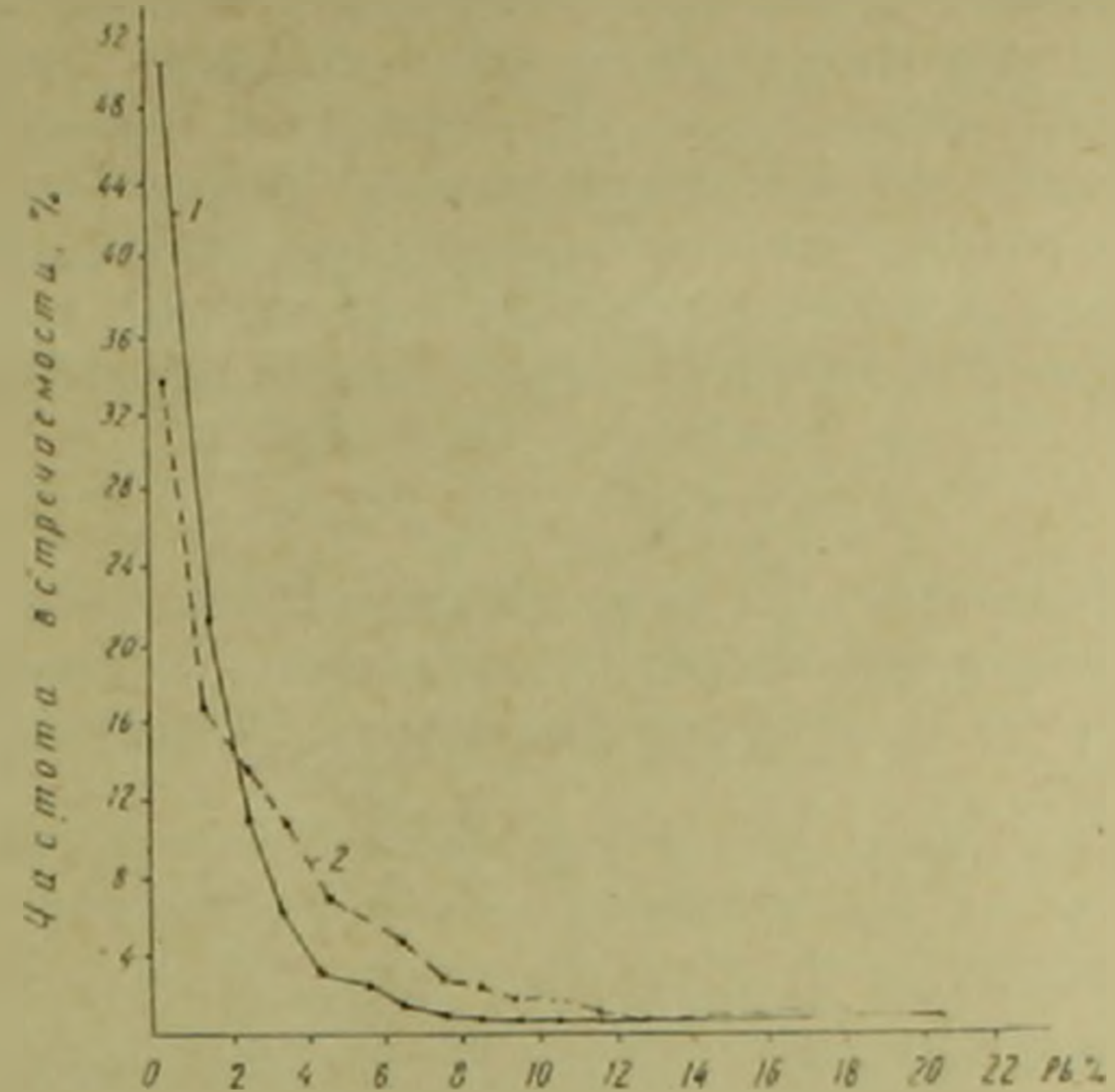
(Представлено академиком АН Армянской ССР И. Г. Магакьяном 18/V 1965)

Исследования по определению функции распределения содержания компонентов в теле полезного ископаемого в настоящее время являются актуальной задачей, поскольку применение тех или иных законов математической статистики зависит от функции распределения случайной величины. Следует отметить, что характер распределения элементов в рудах и горных породах обусловлен большим числом неравноценных факторов и в соответствии с этим следует ожидать различных законов распределения.

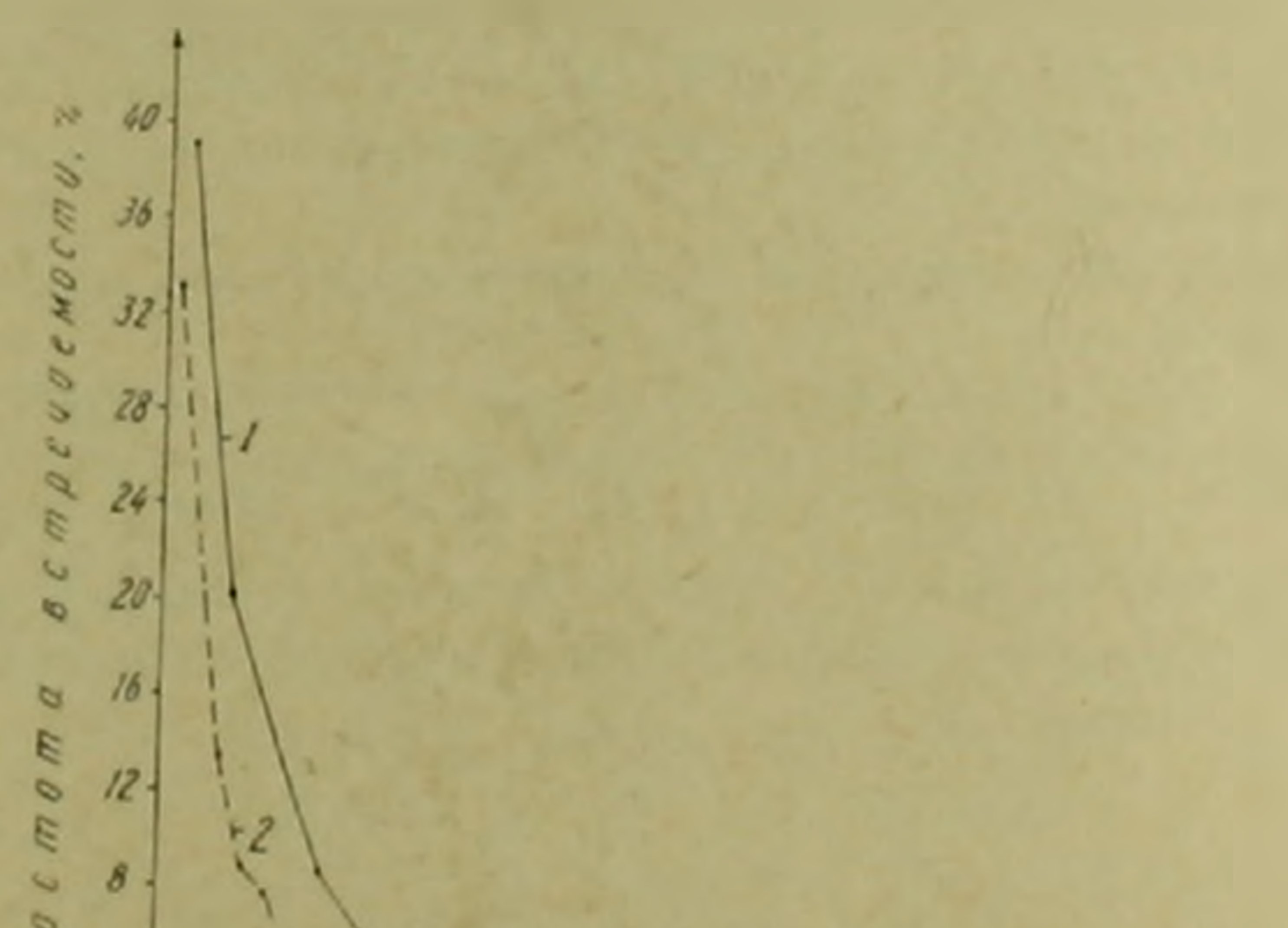
Н. К. Разумовский ([1]) указывает на широкое распространение логарифмически-нормального закона в рудных месторождениях. К такому же выводу приходит Аренс ([2]) в отношении распределения элементов в породах. Д. А. Родионовым ([3]) установлено, что наиболее распространенной функцией, непротиворечащей эмпирическим данным, является логнормальная функция. К. В. Обрей ([4]) и Л. Н. Четвериков ([5]) ставят под сомнение логнормальный закон распределения элементов в породах и рудах и указывают на то, что этот закон неприемлем при крайне низких, а также высоких содержаниях элементов. Из вышеприведенного следует, что вопрос о функции распределения содержаний компонентов в различных геологических образованиях в настоящее время разрешен далеко недостаточно.

Исследования по определению законов распределения частот содержаний элементов в некоторых рудных месторождениях республики привели нас к выводу, что эмпирические данные здесь также не укладываются в рамки нормального или логнормального распределения.

Содержание компонента в теле полезного ископаемого можно рассматривать как непрерывную случайную величину, а данные опробования как случайную выборку из неограниченной совокупности возможностей, так как оно производится при определенных условиях и ограничениях. С целью установления законов распределения частот содержаний компонентов в теле полезного ископаемого произведена статистическая обработка большого числа химических анализов на свинец, цинк и медь, полученных в результате геолого-разведочных и эксплуатационных работ по полиметаллическим месторождениям Ахтала и Газма. Вычислены частоты нахождения содержаний компонентов в равностоящих интервалах и по полученным данным построены гистограммы (фиг. 1, 2). В результате таких построений выявлено,



Фиг. 1. Гистограммы распределения частот содержании свинца в рудах месторождений: 1 — Ахтала, 2 — Газма.



Фиг. 2. Гистограммы распределения частот содержаний цинка в рудах месторождений: 1 — Ахтала; 2 — Газма.

что гистограммы этих элементов в рудах довольно сходны по форме и их можно представить однотипной функцией распределения. Полученные результаты во всех случаях проверялись на логнормальное распределение, однако оказалось, что, за исключением распределения меди на Ахтальском месторождении, этот закон неприемлем.

Задача заключается в том, чтобы выбрать такую формулу $y = f(x;\ k,\ a)$, которая, устанавливая связь между частотой встречаемости и содержанием элементов, в то же время возможно точно характеризовала бы эмпирические данные. Исследования с применением аналитических критериев по нахождению наиболее рациональной модели ([8]) привели нас к выводу, что в рассматриваемом случае распределение частот компонентов достаточно точно можно выразить следующей показательной функцией плотности распределения вероятностей:

$$f(x) = ke^{-\frac{x}{a}},\ 0 \leq x < \infty, \tag{1}$$

где k и a — постоянные. Эта функция, как видно, отлична от функции логнормального или нормального распределения. В последнем случае функция плотности вероятностей выражалась бы формулой:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{2}$$

где a — математическое ожидание, σ^2 — дисперсия.

Таким образом, задача состоит в определении параметров k и a функции (1). Во избежание излишнего повторения здесь определяются параметры лишь для функции распределения свинца в рудах Газминского месторождения. Общее решение задачи позволяет произвести тождественные расчеты и для остальных компонентов, характеризующихся аналогичной функцией распределения, но разными значениями коэффициентов.

По функции (1) определим математическое ожидание — $E(X)$ и дисперсию — $D(X)$

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)\,dx = k\int_0^\infty xe^{-\frac{x}{a}}\,dx = -kaxe^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty +$$

$$+ ka\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}}\,dx = -kae^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty = ka^2;$$

$$D(X) = \int_0^\infty [x - E(X)]^2 f(x)\,dx = k\int_0^\infty (x - ka^2)^2 e^{-\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= -ka(x - ka^2)^2 e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty + 2ka\int_0^\infty (x - ka^2)e^{-\frac{x}{a}}\,dx = k^3a^5 -$$

$$- 2ka^2(x - ka^2)e^{-\frac{x}{a}}\Big|_0^\infty + 2ka^2\int_0^\infty e^{-\frac{x}{a}}\,dx = k^3a^5 - 2k^2a^4 -$$

$$-2ka^3e^{-\frac{x}{a}}\Bigg|_0^{\infty}=k^3a^5-2k^2a^4+2ka^3.$$

Но из условия

$$F(+\infty)=k\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{a}}\,dx=-ka\,e^{-\frac{x}{a}}\Bigg|_0^{\infty}=ka=1$$

вытекает, что $k=\frac{1}{a}$, следовательно

$$E(X)=ka^2=\frac{1}{a}\,a^2=a \quad \text{и}$$

$$D(X)=\frac{a^5}{a^3}-\frac{2a^4}{a^2}+\frac{2a^3}{a}=a^2,$$

т. е.

$$E(X)=\sqrt{D(X)}=\sigma=a. \tag{3}$$

Равенство (3) можно рассматривать как необходимое условие, при котором эмпирические данные согласуются с указанной функцией распределения, т. е. если взамен математического ожидания и дисперсии применять их статистические оценки—эмпирическое среднее $(\bar{x})$ и дисперсию (s^2), то должно иметь место равенство

$$\bar{x}=s.$$

Эти стандарты определяются формулами:

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}x_i m_i}{N},\quad s^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{r}(x_i-\bar{x})^2 m_i}{N-1},$$

где x_i — среднеарифметическое содержание компонента в классовых интервалах, m_i — число проб в них, N — общее число проб, r — число классов.

Введя в формулу (1) статистическую оценку математического ожидания, получим следующую простую функцию плотности вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\bar{x}}e^{-\frac{x}{\bar{x}}},\ 0\leqslant x<\infty \tag{4}$$

и функцию распределения вероятностей

$$F(x)=\frac{1}{\bar{x}}\int_0^x e^{-\frac{x}{\bar{x}}}\,dx,\ 0\leqslant x<\infty. \tag{5}$$

В частности для свинца эта функция имеет вид

$$F(x)=0{,}333\int_0^x e^{-\frac{x}{3}}\,dx,\ 0\leqslant x<\infty \tag{6}$$

Пользуясь функцией (6), можно определить вероятность попадания случайной величины в классовых промежутках по формуле:

$$P\{x_i \le x < x_{i+1}\} = 0{,}333 \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\frac{x}{3}}\, dx,$$

где x_i и x_{i+1} являются нижней и верхней границами интервала. На основании полученных данных составлены эмпирическая — $F_n(x)$ и теоретическая — $F(x)$ функции распределения (табл. 1). Проверка гипотезы о равенстве этих двух функций произведена по критерию А. Н. Колмогорова:

$$\underset{n \to \infty}{P}\{\sqrt{N}\, D_n < \lambda\} \to K(\lambda),$$

где N — число анализов, D_n — максимум отклонений между эмпирической и теоретической функциями распределения:

$$D_n = \underset{0 \le x < \infty}{Max} |F_n(x) - F(x)|,$$

$$K(\lambda) = \sum_{k=0} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}, \quad \lambda > 0.$$

Таблица 1

Границы интервалов	Число проб (m_i)	Частота встречаемости $\left(\frac{m_i}{N}\right)$	Теоретические частоты (P_i)	Эмпирическая функция распределения $F_n(x)$	Теоретическая функция распределения $F(x)$
0—1	205	0,3376	0,2839	0,3376	0,2839
1—2	96	0,1581	0,2028	0,4957	0,4867
2—3	83	0,1361	0,1458	0,6318	0,6325
3—4	65	0,1070	0,1042	0,7388	0,7358
4—5	42	0,0692	0,0749	0,8080	0,8116
5—6	19	0,0313	0,0536	0,8392	0,8652
6—7	29	0,0478	0,0382	0,8870	0,9034
7—8	16	0,0263	0,0275	0,9133	0,9309
8—9	14	0,0214	0,0197	0,9347	0,9506
9—10	9	0,0148	0,0141	0,9495	0,9647
10—11	10	0,0165	0,0102	0,9660	0,9749
11—12	6	0,0099	0,0072	0,9759	0,9821
12—13	3	0,0049	0,0052	0,9800	0,9873
>13	9	0,0048	0,0142	1,0	1,0

$N = 608$, $\bar{x} = 3{,}0$, $S^2 = 8{,}5$

Принимая $a = 0{,}01$, при которой событие практически неосуществимо, по соответствующей таблице (7) определяем $\lambda_a = 1{,}63$. Но поскольку

$$\sqrt{N}\, D_n = 24{,}5 \cdot 0{,}0537 = 1{,}31 < \lambda_a = 1{,}63,$$

то, следовательно, нет основания отрицать принятую гипотезу.

Подобным способом и получены аналогичные функции распределения для свинца, цинка и меди месторождений Ахтала и Газма, что указывает на большую универсальность показательной функции распределения.

$$F(x) = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^x e^{-\frac{x}{\bar{x}}} dx, \; 0 \leqslant x < \infty.$$

В заключение отметим, что распределение частот содержаний указанных металлов довольно близко также к логнормальному закону, хотя отклонения могут быть значительными. Указанная функция распределения установлена при среднем содержании элементов до 5—6%; ожидается переход к нормальному закону при более высоких содержаниях.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Վ. Հ. ԳԱՐՈՒՆՅԱՆ

Օգտակար հանածոյի հանքավայրում էլեմենտների պարունակությունների բաշխման ֆունկցիայի հարցի շուրջը

Հոդվածում բերված են հեղինակի ուսումնասիրությունների արդյունքները մի շարք հանքայնացնող էլեմենտների՝ Pb, Zn և Cu բաշխման ֆունկցիայի վերաբերյալ Ղազմա և Ախթալայի հանքավայրերում։ Եղած փաստական նյութի ստատիստիկական մշակումը հնարավորություն է տալիս առաջին անգամ հաստատելու, որ էլեմենտների պարունակությունների հաճախականությունները կարելի է արտահայտել հետևյալ բաշխման ֆունկցիայով՝

$$F x() = \frac{1}{\bar{x}} \int_0^x e^{-\frac{x}{\bar{x}}}, \; 0 \leqslant x < \infty$$

որտեղ $\bar{x}$-ը էլեմենտի պարունակության էմպիրիկական միջինն է։

Վերոհիշյալ բաշխման ֆունկցիան որոշակիորեն տարբերվում է հավանականությունների բաշխման նորմալ կամ լոգնորմալ ֆունկցիաներից և կիրառելի է ոչ շատ մեծ միջին պարունակությունների դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. К. Разумовский*, ДАН СССР, № 9, 1940. [2] *Л. Г. Аренс*. Geoch. Cosmoch Acta, vol. 5, № 2, vol. 6, № 2—3, 1954. [3] *Д. А. Родионов*. Функции распределения содержаний элементов и минералов в изверженных горных породах. Изд. „Наука". М., 1964. [4] *К. В. Обрей*, Geoch., Cosmoch. Acta, vol. 9, № 1—2, 1956. [5] *Л. И. Четвериков*. Советск. геология, № 7, 1964. [6] *Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова*. Численные методы анализа, М., 1963. [7] *Կ. Հ. Համբարձումյան*. Հավանականությունների տեսության համառոտ դասընթաց. Հայպետուսմանկհրատ, 1961.