

Г. Е. Багдасарян и В. Ц. Гнуин

Динамическая устойчивость анизотропной замкнутой цилиндрической оболочки

(Представлено Академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 14/V 1965)

1. Рассмотрим задачу динамической устойчивости анизотропной замкнутой круговой цилиндрической оболочки, сжатой продольной силой $P_0 + P_1 \cos bl$.

За координатную поверхность принимается срединная поверхность оболочки, которая представляется координатами α_1, α_2 (α_1 — вдоль образующей, α_2 — по дуге поперечного сечения) и радиусом кривизны $R = \text{const}$. Принимается, что материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной поверхности.

В отношении тонкой пологой оболочки принимается гипотеза недеформируемых нормалей.

В силу принятых предположений уравнение равновесия оболочки имеет вид ⁽¹⁾

$$\left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \times \\ \times \left[a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} + 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} + (a_{66} + 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^3} + \right. \\ \left. + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \right] \Phi + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha_1^4} - Z = 0, \quad (1.1)$$

Здесь Φ — функция перемещений, Z — нормально приложенное внешнее давление.

$$a_{11} = \frac{c_{11}c_{66} - c_{16}^2}{c_{66}Q}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}c_{66} - c_{26}^2}{c_{66}Q}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26}}{c_{66}Q}, \\ a_{66} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{66}Q}, \quad a_{16} = \frac{c_{11}c_{26} - c_{12}c_{16}}{c_{66}Q}, \quad a_{26} = \frac{c_{22}c_{16} - c_{12}c_{26}}{c_{66}Q}, \quad (1.2) \\ Q = \frac{1}{c_{66}} [(c_{11}c_{66} - c_{16}^2)(c_{22}c_{66} - c_{26}^2) - (c_{12}c_{66} - c_{16}c_{26})^2],$$

$$c_{ik} = B_{ik}h, \quad D_{ik} = B_{ik} \frac{h^3}{12}.$$

h — толщина, B_{ik} — коэффициенты упругости материала оболочки (1).

В случае, когда оболочка изготовлена из ортотропного материала с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями, для коэффициентов B_{ik} имеем (2)

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11} \cos^4 \varphi + 2 (B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \sin^4 \varphi, \\ B_{22} &= B_{11} \sin^4 \varphi + 2 (B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + B_{22} \cos^4 \varphi, \\ B_{12} &= B_{12} + [B_{11} + B_{22} - 2 (B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ B_{66} &= B_{66} + [B_{11} + B_{22} - 2 (B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi, \\ B_{16} &= \frac{1}{2} [B_{12} \sin^2 \varphi - B_{11} \cos^2 \varphi + (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi, \\ B_{26} &= \frac{1}{2} [B_{22} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi - (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где φ — угол между главными геометрическими и физическими направлениями, B_{ik} — коэффициенты упругости при $\varphi = 0$.

В (1.1) заменив Z выражением (3)

$$\left[-\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\rho h \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2\pi R} (P_0 + P_1 \cos \theta t) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} \right] a_{11} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^4} +$$

$$- 2a_{16} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^3 \partial \alpha_2} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1^2 \partial \alpha_2^2} + 2a_{26} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2^3} + a_{22} \frac{\partial^4}{\partial \alpha_2^4} \Big| \Phi. \quad (1.4)$$

получим уравнения динамической устойчивости рассматриваемой оболочки.

Здесь ρ — плотность материала оболочки, ε — коэффициент линейного затухания.

2. Предполагая, что оболочка достаточно длинная, представим решение уравнения (1.1) в виде (3)

$$\Phi = f(t) e^{-i \left(k \alpha_1 + \frac{n}{R} \alpha_2 \right)}. \quad (2.1)$$

где $f(t)$ — искомая функция времени t , $k = \frac{\pi}{\lambda}$ — волновое число, n — число волн по окружности, λ — длина полуволны в направлении обтекающих.

Подставляя (2.1) в (1.1) с учетом (1.4), получим

$$f'' + 2\varepsilon f' + \omega^2 \left(1 - 2\mu \cos \theta t \right) f = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\omega^2 = \frac{K}{\rho h} \left(1 - \frac{P_0}{P^*} \right), \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{P_1}{P^* - P_0}, \quad P^* = \frac{2\pi R K}{k^2}. \quad (2.3)$$

$$K = D_{11} k^4 + 4D_{16} \frac{k^3 n}{R} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{k^2 n^2}{R^2} + 4D_{26} \frac{k n^3}{R^3} + D_{22} \frac{n^4}{R^4} -$$

$$+ \frac{k^4}{R^2} \left[a_{11} k^4 + 2a_{16} \frac{k^2 n}{R} + (a_{66} - 2a_{12}) \frac{k^2 n^2}{R^2} + 2a_{26} \frac{k n^3}{R^2} + a_{22} \frac{n^4}{R^4} \right]^{-1}.$$

Здесь ω — собственная частота, μ — коэффициент возбуждения оболочки, нагруженной постоянным составляющим осевой силы. P_0 — верхнее критическое значение сжимающей силы при ее статическом действии.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи приводится к известному уравнению Матье (2.2). Для главной (наиболее опасной) области динамической неустойчивости имеем (2)

$$\theta_{i1}^2 = 4 \omega^2 \left[1 + (-1)^i \sqrt{\lambda^2 - \frac{4\varepsilon^2}{\omega^2}} \right], \quad i=1, 2. \quad (2.4)$$

В случае ортотропной оболочки с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями критические частоты главного параметрического резонанса θ_{i1} существенно зависят от ориентации главных направлений упругости и являются периодическими функциями угла φ с периодом π . Таким образом появляется возможность регулирования значений критических частот в зависимости от условий работы оболочки.

Наибольший интерес представляют те значения параметров k и n , вблизи которых критическая частота θ_{i1} принимает минимальное значение.

Если имеет место симметричная форма потери устойчивости, то $n=0$ и критическая частота θ_{i1} принимает минимальное значение при*

$$k^2 = \frac{P_1 + 2P_0}{8\pi R D_{11}}. \quad (2.5)$$

Для границ главной области параметрического резонанса получим формулы

$$\theta_{11}^2 = \frac{4}{\rho h R^2} \left[\frac{1}{a_{11}} - \frac{(P_1 + 2P_0)^2}{64 \pi^2 D_{11}} \right], \quad (2.6)$$

$$\theta_{21}^2 = \frac{4}{\rho h R^2} \left[\frac{1}{a_{11}} - \frac{3(P_1 + 2P_0)^2}{64 \pi^2 D_{11}} \right]. \quad (2.7)$$

Рассматривая формулы (2.5), (2.6), легко заметить, что минимальное значение критической частоты θ_{i1} и значение длины полуволны в направлениях образующих зависят от ориентации главных направлений упругости материала оболочки.

3. Для иллюстрации приводим два примера решения осесимметричной задачи динамической устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки с несовпадающими главными геометрическими и физическими направлениями при $B_{11}=2E$, $B_{22}=E$, $B_{66}=0,5E$, $P_0=0$, $P_1=2Eh^2$ и при $B_{11}=10E$, $B_{22}=E$, $B_{66}=0,5E$, $P_0=0$, $P_1=5Eh^2$.

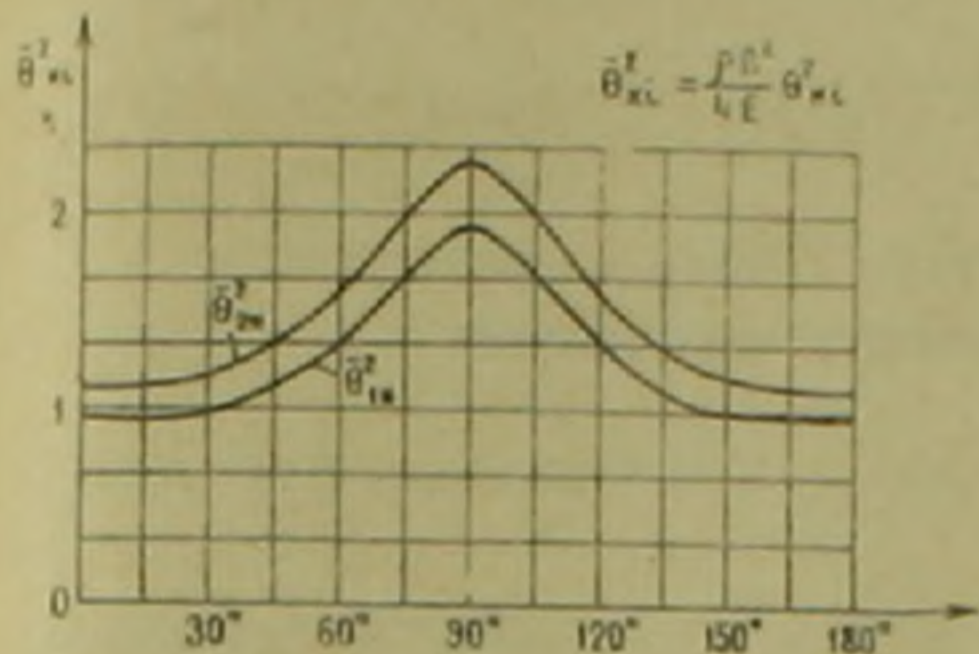
* Здесь для простоты выкладок рассматривается консервативная задача.

При этих исходных данных на фиг. 1, 2 приведены графики зависимостей $\min \bar{\theta}_1^2(\varphi)$ и $\bar{\theta}_2^2(\varphi)$.

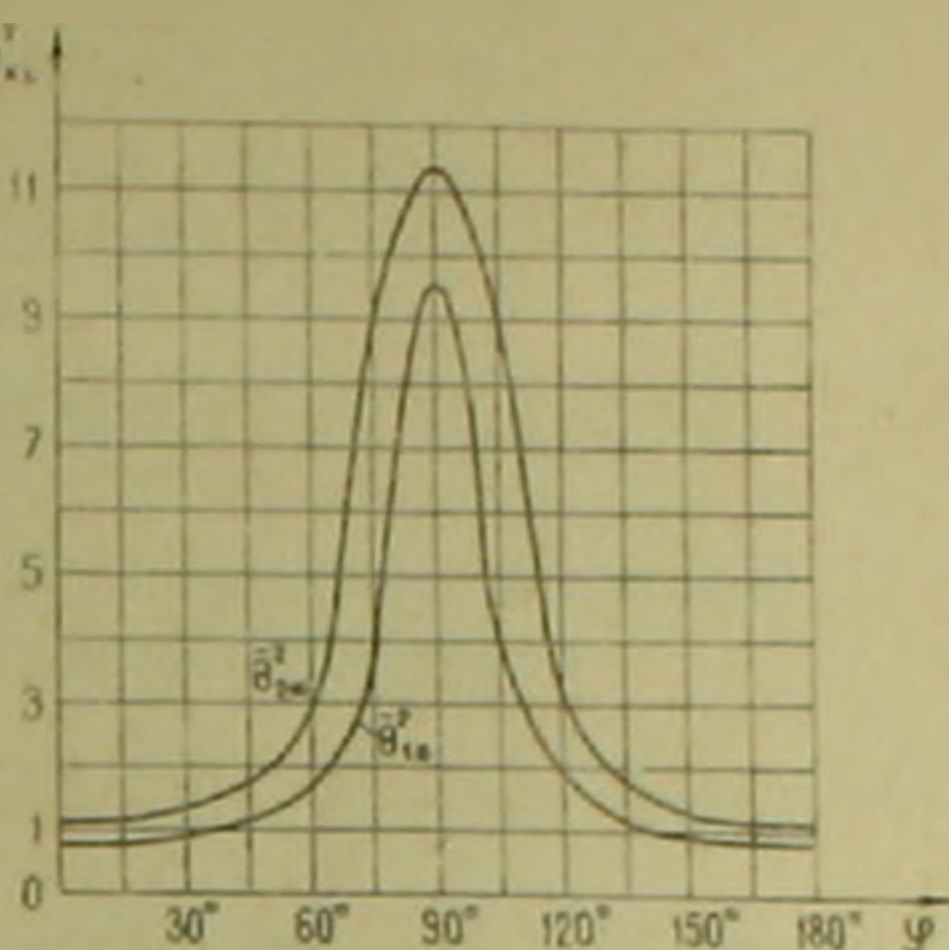
Рассматривая фиг. 1, 2, замечаем:

а) $\min_{(\varphi)} \left[\min_{(k)} \bar{\theta}_{1*}^2 \right]$ достигает при $\bar{\theta}_{1*}^2$

$\varphi=0$, а $\max_{(\varphi)} \left[\min_{(k)} \bar{\theta}_{1*}^2 \right]$ — при $\varphi = \frac{\pi}{2}$;



Фиг. 1.



Фиг. 2.

б) минимальное значение ширины области главного параметрического резонанса достигается при $\varphi=0$, а максимальное значение — при $\varphi = \pi/2$;

в) вблизи $\varphi = \pi/2$ наблюдается бурное возрастание критических частот, а вблизи $\varphi=0$ и $\varphi = \pi$, в достаточно большом интервале изменения φ , критические частоты изменяются незначительно. Ширина области незначительного изменения критических частот увеличивается с увеличением отношения B_{11}/B_{22} .

Таким образом, варьируя расположением главных направлений упругости, можно избежать возможности появления параметрического резонанса оболочки.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Г. Б. БАГДАСАРИАН и др. Г. Б. ГЕОРИС

Աճիրոստայ փակ զլանային թաղանթի դինամիկ կայունությունը

Դիտարկված է անիզոտրոպ փակ զլանային թաղանթի դինամիկ կայունության խնդիրը բաց ժամանակի պարբերական օրենքով փոփոխվող երկայնական ուժերի ազդեցության տակ:

Աշխատանքի հիմքում դրված է մեկ առաձգական սիմետրիայի հարթություն ունեցող ելույթից պատրաստված թաղանթների տեխնիկական տեսությունը ⁽¹⁾:

Խնդիրը բերվում է Մատեի հայտնի հավասարման ուսումնասիրմանը: Ստացված է բանաձևեր կրիտիկական հաճախականությունների որոշման համար:

Որպես մասնավոր դեպք ուսումնասիրված է օրթոտրոպ զլանային թաղանթ, որի զլանվոր ֆիզիկական և երկրաչափական ուղղությունները կազմում են որոշակի φ -անկյուն:

Ցույց է տրված, որ փոփոխվող առաձգականության զլանվոր ուղղությունների դիրքը, կարելի է խուսափել թաղանթում պարամետրական ոեզոնանս առաջանալուց:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. С. А. Амбарцумян. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961. В. В. Болотин. Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1956. Г. Е. Багдасарян, «Известия АН АрмССР», серия физ.-мат. наук, т. XV, № 6 (1962).