ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLI 1965 5

МАТЕМАТИКА

Ву Нгоан и И. В. Островский

О логарифмической производной мероморфной функции

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 3/VII 1965)

Р. Неванлинна принадлежит следующий результат ((1), стр. 61).

Пусть функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\Omega$, $\Omega\leqslant\infty$, и $f(0)=1$. Тогда при всех r и R, $0<r<R<\Omega$ справедливо неравенство

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<4\overset{+}{\ln}T(R)+3\ln\frac{1}{R-r}+4\overset{+}{\ln}R+2\overset{+}{\ln}\frac{1}{r}+24.$$

В этой заметке доказана такая теорема.

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна при $|z|<\Omega$, $\Omega\leqslant\infty$, и $f(0)=1$. Тогда при всех α, $0<\alpha<1$, и всех r и R, $0<r<R<\Omega$, справедливо неравенство*

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<\frac{1}{\alpha}\overset{+}{\ln}\left\{\frac{32}{1-\alpha}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha}r^{-\alpha}\mathring{T}(R)\right\}+\frac{1}{\alpha}\ln 2, \qquad (1)$$

где $\mathring{T}(R)=\max(T(R),1)$.

Для сравнения с результатом Р. Неванлинна заметим, что из (1) непосредственно вытекает соотношение

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)<\frac{1}{\alpha}\overset{+}{\ln}T(R)+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\overset{+}{\ln}\frac{1}{R-r}+\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\overset{+}{\ln}R+$$

$$+\overset{+}{\ln}\frac{1}{r}+\frac{1}{\alpha}\ln\frac{64}{1-\alpha}.$$

Поскольку α можно брать сколь угодно близким к единице, то в этом соотношении коэффициенты при $\overset{+}{\ln}T(R)$, $\overset{+}{\ln}\frac{1}{R-r}$ и $\overset{+}{\ln}R$ можно сделать сколь угодно близкими соответственно к 1, 2 и 2.

При помощи нашей теоремы мы получим, что для любой мероморфной во всей плоскости функции $f(z)$, имеющей порядок ρ, справедлива оценка

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}(\ln r)^{-1}m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\leqslant\max(\rho-1,0). \qquad (2)$$

Легко проверить, что для функции $f(z)=E_\rho(z)$, где $E_\rho(z)$ — функция Миттаг-Леффлера,

$$E_\rho(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(1+n\rho^{-1})},$$

в (2) имеет место знак равенства (при целом ρ можно рассмотреть также функцию $\exp(z^\rho)$).

2. Доказательство теоремы. Будем исходить из формулы Шварца-Неванлинна ([1], стр. 4):

$$\ln f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(se^{i\theta})|\frac{se^{i\theta}+z}{se^{i\theta}-z}\,d\theta+\sum_{|a_k|<s}\ln\frac{s(z-a_k)}{s^2-\bar{a}_k z}-$$

$$-\sum_{|b_l|<s}\ln\frac{s(z-b_l)}{s^2-\bar{b}_l z}+\text{const},$$

где $|z|<s<\Omega$, a_k — нули функции $f(z)$, b_l — ее полюсы. Дифференцируя по z, получим

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(se^{i\theta})|\frac{2se^{i\theta}}{(se^{i\theta}-z)^2}\,d\theta+\sum_{|a_k|<s}\frac{s^2-|a_k|^2}{(s^2-\bar{a}_k z)(z-a_k)}-$$

$$-\sum_{|b_l|<s}\frac{s^2-|b_l|^2}{(s^2-\bar{b}_l z)(z-b_l)}.$$

Обозначим через $\{c_m\}$ теоретико-множественную сумму последовательностей $\{a_k\}$ и $\{b_l\}$. Замечая, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\ln|f(se^{i\theta})||\,d\theta=m(s,0)+m(s,\infty)\leqslant 2T(s),$$

$$\left|\frac{s^2-|c_m|^2}{(s^2-\bar{c}_m z)(z-c_m)}\right|\leqslant\frac{s}{s-|z|}\cdot\frac{1}{|z-c_m|},\quad |c_m|<s,$$

будем иметь

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\leqslant\frac{4sT(s)}{(s-|z|)^2}+\frac{s}{s-|z|}\sum_{|c_m|<s}\frac{1}{|z-c_m|},\quad |z|<s<\Omega.$$

Из этого неравенства следует, что $(0<r<s<\Omega,\ 0<\alpha<1)$

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^\alpha d\varphi\leqslant\int_0^{2\pi}\left\{\frac{4sT(s)}{(s-r)^2}+\frac{s}{s-r}\sum_{|c_m|<s}\frac{1}{|re^{i\varphi}-c_m|}\right\}^\alpha d\varphi\leqslant$$

$$< \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{4^\alpha s^\alpha T^\alpha(s)}{(s-r)^{2\alpha}} + \frac{s^\alpha}{(s-r)^\alpha} \sum_{|c_m|<s} \frac{1}{|re^{i\varphi} - c_m|^\alpha} \right\} d\varphi =$$

$$= 2\pi \frac{4^\alpha s^\alpha T^\alpha(s)}{(s-r)^{2\alpha}} + \frac{s^\alpha}{(s-r)^\alpha} \sum_{|c_m|<s} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - c_m|^\alpha}.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - c_m|^\alpha} < \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|re^{i\varphi} - |c_m||^\alpha} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|r\sin\varphi|^\alpha} =$$

$$= \frac{4}{r^\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin^\alpha \varphi} < \frac{4}{r^\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\varphi^\alpha} = \frac{2\pi}{r^\alpha(1-\alpha)},$$

то мы имеем

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi < 2\pi \frac{4^\alpha s^\alpha T^\alpha(s)}{(s-r)^{2\alpha}} + \frac{2\pi s^\alpha [n(s, 0) + n(s, \infty)]}{(1-\alpha)(s-r)^\alpha r^\alpha}.$$

В этом неравенстве s — произвольное число, такое что $r < s < \Omega$. Положим $s = \frac{1}{2}(R + r)$, $r < R < \Omega$. Замечая, что

$$s - r = R - s = \frac{1}{2}(R - r), \quad T(s) < T(R),$$

$$n(s, 0) + n(s, \infty) < \frac{s}{R-s} \int_s^R \frac{n(t, 0) + n(t, \infty)}{t} dt <$$

$$< \frac{s}{R-s}(N(R, 0) + N(R, \infty)) \leqslant \frac{s}{R-s} \cdot 2T(R) < \frac{4R}{R-r} T(R),$$

получаем

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi < \frac{2^{4\alpha+1}\pi R^\alpha T^\alpha(R)}{(R-r)^{2\alpha}} + \frac{2^{3+\alpha}\pi R^{1+\alpha} T(R)}{(1-\alpha)(R-r)^{1+\alpha} r^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{32\pi}{1-\alpha} \mathring{T}(R) \left\{ \frac{1}{R^\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-2\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{32\pi}{1-\alpha} \mathring{T}(R) \left\{ \frac{1}{r^\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} \right\} =$$

$$= \frac{64\pi}{1-\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} r^{-\alpha} \mathring{T}(R).$$

Так как

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi = \frac{1}{\alpha}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^{\alpha} d\varphi\right\} <$$

$$< \frac{1}{\alpha}\left\{\overset{+}{\ln}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^{\alpha} d\varphi\right] + \ln 2\right\},$$

то теорема доказана.

Замечание. Попутно доказано, что для мероморфной при $|z| < \Omega$, $\Omega \leqslant \infty$, функции $f(z)$ с $f(0) = 1$ и любых α, r и R, $0 < \alpha < 1$, $0 < r < R < \Omega$, справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right|^{\alpha} d\varphi < \frac{64\pi}{1-\alpha}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} r^{-\alpha}\, \overset{*}{T}(R). \tag{3}$$

Этот результат, как нам кажется, представляет самостоятельный интерес, поскольку он примыкает к следующей важной теореме У. Дж. Фукса ([2]): если $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости функция конечного нижнего порядка λ, то существует последовательность $r_n \to \infty$ такая, что при $r = r_n$

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi < K(\lambda)\frac{T(r)}{r}, \tag{4}$$

где $K(\lambda)$ — положительная конечная величина, зависящая лишь от λ (полученная Фуксом оценка для $K(\lambda)$ была позднее усилена В. П. Петренко ([3, 4])). Величина, стоящая слева в (4), обращается в ∞ при $r = |c_m|$, поэтому для нее невозможна оценка *для всех* r, аналогичная (3).

Так как

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi < \overset{+}{\ln}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi\right\} + \ln 2,$$

то из теоремы Фукса следует дополняющее нашу теорему утверждение, что для всякой мероморфной во всей плоскости функции $f(z)$ конечного нижнего порядка λ можно указать последовательность $r_n \to \infty$ такую, что при $r = r_n$

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \overset{+}{\ln}\left\{\frac{K(\lambda)}{2\pi}\cdot\frac{T(r)}{r}\right\} + \ln 2. \tag{5}$$

3°. Докажем теперь соотношение (2). Легко видеть, что общность не уменьшится, если мы будем считать, что $f(0) = 1$. Полагая в (1) $R = 2r$, получим

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{128}{1-\alpha} \cdot \frac{\hat{T}(2r)}{r^{\alpha}} \right\} + \frac{\ln 2}{\alpha} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T(2r)+1}{r^{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \ln \frac{256}{1-\alpha}. \tag{6}$$

Так как при любом $\varepsilon > 0$ справедливо $T(2r) = O((2r)^{\rho+\varepsilon}) = O(r^{\rho+\varepsilon})$, $r \to \infty$, то

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le \frac{1}{\alpha} \max(\rho + \varepsilon - \alpha, 0) \ln r + O(1), \quad r \to \infty,$$

откуда

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le \frac{1}{\alpha} \max(\rho + \varepsilon - \alpha, 0).$$

Устремляя ε к 0, а α к 1, получаем (2).

Замечание 1. Если $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости функция нижнего порядка λ, то

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le \max(\lambda - 1, 0). \tag{7}$$

Для доказательства этого соотношения нужно воспользоваться (6) и тем обстоятельством, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется последовательность $r_n \to \infty$, для которой $T(2r_n) = O(r_n^{\lambda+\varepsilon})$, $n \to \infty$.

Замечание 2. Неравенство

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le \max(\rho - 1, 0),$$

которое слабее и (2), и (7), легко следует из (5).

Замечание 3. Одним из авторов было доказано ([5], стр. 286—287), что если $f(z)$ — мероморфная во всей плоскости функция рода p, то

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le p \ln r + o(1), \quad r \to \infty. \tag{8}$$

Как известно, всегда $p \le \rho \le p + 1$. Если мы имеем $p \le \rho < p + 1$ и $p \ge 1$, то из (2) следует (8). Если же $\rho = p + 1$ или $p = 0$, то (8) из (2) не следует. Мы можем все же сейчас получить (8) при $0 \le \rho < 1$ (тогда $p = 0$). Для этого заметим, что

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\ln} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^{\alpha} d\varphi \le \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^{\alpha} d\varphi$$

и поэтому из (3) с $R = 2r$, $\rho < \alpha < 1$ вытекает

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \le \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{256}{1-\alpha} \cdot \frac{T(2r)+1}{r^{\alpha}} = o(1), \quad r \to \infty.$$

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Մերոմորֆ ֆունկցիայի լոգարիթմական ածանցյալի մասին

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Ենթադրենք $f(z)$ *ֆունկցիան մերոմորֆ է* $|z| < \Omega$, $\Omega \le \infty$ *շրջանում և* $f(0) = 1$։ *Այդ դեպքում բոլոր* α*-ների,* $0 < \alpha < 1$ *և բոլոր* r *և* R, $0 < r < R < \Omega$ *արժեքների համար իրավացի է հետևյալ անհավասարությունը*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \frac{1}{\alpha} \overset{+}{\ln} \left\{ \frac{32}{1-\alpha} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-1-\alpha} r^{-\alpha} \hat{T}(R) \right\} + \frac{1}{\alpha} \ln 2,$$

որտեղ $\hat{T}(R) = \max(T(R), 1)$։

Այս թեորեմը $m(r, f'/f)$*-ի համար տալիս է ավելի ճշգրիտ գնահատական, քան Ռ. Նևանլիննային պատկանող թեորեմը* [1], *էջ 61։*

Բերված թեորեմի օգնությամբ ապացուցված է, որ ամբողջ հարթության մեջ մերոմորֆ ρ *կարգի* $f(z)$ *ֆունկցիայի համար իրավացի է*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} (\ln r)^{-1} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \max(\rho - 1, 0)$$

անհավասարությունը, որտեղ հնարավոր է նաև հավասարության նշանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. Nevanlinna*, Le théorème de Picard—Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929. [2] *У. Дж. Фукс*, Ann. of Math., 68, № 2 (1958), 203—209. [3] *В. П. Петренко*, „Известия АН Армянской ССР“, серия физ.-матем., т. 17, № 1 (1964), 23—36. [4] *В. П. Петренко*, ДАН СССР, т. 158, № 5 (1964), 1030—1033. [5] *Г. Виттих*, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, М., Физматгиз, 1960.