ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLI 1965 5

МАТЕМАТИКА

Ф. Г. Арутюнян

О сходимости почти всюду рядов по базисам пространства L_p [0, 1]

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. Талаляном 29/V 1965)

§ 1. Введение. В 1927 г. А. Н. Колмогоровым в работе [1] без доказательства была сформулирована следующая

Теорема. *Существует функция $f(x) \in L_1[0, 2\pi]$, ряд Фурье которой*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (1)$$

после некоторой перестановки членов расходится почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$.

В 1960 г. появилась работа З. Загорского [2], содержащая схему доказательства этой теоремы. Отправляясь от метода Загорского, П. Л. Ульянов [3] распространил эту теорему на ряды по системам Хаара и Уолша. Исходя из указанного результата, П. Л. Ульянов [3] и А. М. Олевский [4] доказали, что аналогичная теорема верна для любых полных ортонормированных систем и даже, как показал П. Л. Ульянов [5], для любых базисов пространства $L_2[0, 1]$. Теорема П. Л. Ульянова формулируется следующим образом.

Теорема Ульянова. *Пусть $\{f_n(x)\}$ базис пространства $L_2[0, 1]$. Существует функция $f(x) \in L_2[0, 1]$, разложение которой по базису*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \qquad (2)$$

после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Оказывается, что эта теорема П. Л. Ульянова верна для любых базисов пространства $L_p[0, 1]$, $p > 1$. А именно, в настоящей заметке доказывается

Теорема 1. *Пусть $\{f_n(x)\}$ — базис пространства $L_p[0, 1]$*,

$p > 1$. *Существует функция $f(x) \in L_p[0, 1]$, разложение которой по базису*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x) \tag{3}$$

после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$.

В доказательстве теоремы 1 используется конструкция работы ([4]) Олевского, но при этом приходится применять метод, отличный от методов П. Л. Ульянова и А. М. Олевского, использованных ими при доказательстве соответствующих теорем для полных ортонормированных систем и для базисов пространства $L_2[0, 1]$.

Кроме того, указанным методом доказывается также следующая

Теорема 2. *Пусть последовательность нормированных функций $\{f_n(x)\}$ из $L_p[0, 1]$, $p > 1$ слабо сходится к нулю в $L_p[0, 1]$, тогда можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$ такую, что если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{n_k}(x) \tag{4}$$

сходится в метрике $L_p[0, 1]$, то он сходится и почти всюду на $[0, 1]$.

Отметим, что теорема 2 является обобщением теоремы Д. Е. Меньшова ([5]) о том, что из всякой последовательности ортонормированных функций можно выделить подпоследовательность сходимости. Более того, учитывая, что последовательность функций $\{f_n(x)\}$, образующих нормированный базис в пространстве $L_p[0, 1]$, $p > 1$, слабо сходится к нулю в $L_p[0, 1]$ (это следует из ([6]) теоремы 6. 2. 5), из теоремы 2 вытекает

Следствие. Если $\{f_n(x)\}$ — нормированный базис в $L_p[0, 1]$, $p > 1$, то из любой подпоследовательности $\{f_{n_k}(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_{k_i}}(x)\}$ такую, что если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{n_{k_i}}(x) \tag{5}$$

сходится в метрике $L_p[0, 1]$, то он сходится и почти всюду на $[0, 1]$.

§ 2. Доказательство теоремы 1. Прежде всего напомним определение системы Хаара. Положим

$$\chi_0^{(0)}(x) = 1, \quad \text{при} \quad x \in [0, 1] \tag{6}$$

далее, для каждого $m = 0, 1, 2, \cdots$,

$$
\chi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\dfrac{2k-2}{2^{m+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{m+1}}\right) \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{m+1}}, \dfrac{2k}{2^{m+1}}\right) \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases} \tag{7}
$$

где для каждого m индекс k пробегает значения $k = 1, 2, \cdots, 2^m$. Через $\{\chi_n(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \cdots$; обозначим систему Хаара, упорядоченную в порядке

$$
\chi_0^{(0)}(x), \quad \chi_0^{(1)}(x), \cdots, \chi_m^{(1)}(x), \cdots, \chi_m^{(2^m)}(x) \cdots \tag{8}
$$

В дальнейшем мы будем применять также некоторый класс ортонормированных систем, построение которых аналогично построению системы Хаара, но при этом отрезок $[0,1]$ делится не на интервалы равной длины, а на произвольные множества равной меры.

Для построения этих ортонормированных систем определим систему множеств $\{E_0^{(0)}, \overset{+}{E}{}_m^{(k)}, \overset{-}{E}{}_m^{(k)}\}$, $m = 0, 1, 2, \cdots$; $1 \leqslant k \leqslant 2^m$ следующим образом.

Положим

$$
E_0^{(0)} = [0, 1]. \tag{9}
$$

Разделим $E_0^{(0)}$ на два множества $\overset{+}{E}{}_0^{(1)}$, $\overset{-}{E}{}_0^{(1)}$ равной меры

$$
\overset{+}{E}{}_0^{(1)} \cup \overset{-}{E}{}_0^{(1)} = E_0^{(0)}, \quad \mu\overset{+}{E}{}_0^{(1)} = \mu\overset{-}{E}{}_0^{(1)}. \tag{10}
$$

Если уже определены множества

$$
E_0^{(0)}, \overset{+}{E}{}_0^{(1)}, \overset{-}{E}{}_0^{(1)}, \cdots, \overset{+}{E}{}_{m-1}^{(1)}, \overset{-}{E}{}_{m-1}^{(1)}, \cdots, \overset{+}{E}{}_{m-1}^{(2^{m-1})}, \overset{-}{E}{}_{m-1}^{(2^{m-1})}, \tag{11}
$$

то множества

$$
\overset{+}{E}{}_m^{(2k-1)}, \overset{-}{E}{}_m^{(2k-1)}, \overset{+}{E}{}_m^{(2k)}, \overset{-}{E}{}_m^{(2k)}, \quad 1 \leqslant k \leqslant 2^{m-1} \tag{12}
$$

определяются следующим образом

$$
\begin{gathered}
\overset{+}{E}{}_m^{(2k-1)} \cup \overset{-}{E}{}_m^{(2k-1)} = \overset{+}{E}{}_{m-1}^{(k)}, \; \mu\overset{+}{E}{}_m^{(2k-1)} = \mu\overset{-}{E}{}_m^{(2k-1)}, \; \overset{+}{E}{}_m^{(2k-1)} \cap \overset{-}{E}{}_m^{(2k-1)} = 0 \\
\overset{+}{E}{}_m^{(2k)} \cup \overset{-}{E}{}_m^{(2k)} = \overset{-}{E}{}_{m-1}^{(k)}, \; \mu\overset{+}{E}{}_m^{(2k)} = \mu\overset{-}{E}{}_m^{(2k)}, \; \overset{+}{E}{}_m^{(2k)} \cap \overset{-}{E}{}_m^{(2k)} = 0
\end{gathered} \tag{13}
$$

Положим

$$
\varphi_0^{(0)}(x) = 1, \text{ при } x \in E_0^{(0)}, \tag{14}
$$

а для каждого $m = 0, 1, 2, \cdots$;

$$
\varphi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \overset{+}{E}{}_m^{(k)} \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \overset{-}{E}{}_m^{(k)} \\ 0, & \text{в остальных точках,} \end{cases} \tag{15}
$$

где для всякого m, k принимает значения $k=1, 2, \cdots, 2^m$. Через $\{\varphi_n(x)\}$, $n=0, 1, 2, \cdots$, обозначим систему $\{\varphi_0^{(0)}(x), \varphi_m^{(k)}(x)\}$, расположенную в порядке

$$\varphi_0^{(0)}(x), \quad \varphi_0^{(1)}(x), \cdots, \quad \varphi_m^{(1)}(x), \cdots, \quad \varphi_m^{(2^m)}(x), \cdots \tag{16}$$

Систему $\{\varphi_n(x)\}$ назовем обобщенной системой Хаара.

Теорема 1 доказывается при помощи следующих двух лемм.

Лемма 1. *Для любой обобщенной системы Хаара $\{\varphi_n(x)\}$ существует ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{17}$$

который после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду и

$$\left|\sum_{n=0}^{m} a_n \varphi_n(x)\right| < 1, \quad \text{при} \quad x \in E, \ \mu E = 1, \ m = 0, 1, 2, \cdots \tag{18}$$

Лемма 2. *Пусть заданы функции $\psi_0(x), \psi_1(x), \cdots, \psi_n(x)$, принадлежащие пространству $L_q[G]$, $q>1$, $\mu G>0$, тогда для любого $\varepsilon>0$ можно указать множества G_1 и G_2 и функцию $\psi(x)$, такие, что*

1) $G_1+G_2=G, \qquad G_1 \cap G_2 = 0.$

2) $\mu G_1 = \mu G_2,$

$$3) \quad \left|\int_G \psi_k(x)\psi(x)\,dx\right| < \varepsilon, \tag{19}$$

$$k=0, 1, 2, \cdots, n,$$

где

$$4) \quad \psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu G}}, & \text{при} \quad x \in G_1 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{\mu G}}, & \text{при} \quad x \in G_2 \end{cases} \tag{20}$$

Аналог леммы 1, в том частном случае, когда вместо обобщенных систем Хаара $\{\varphi_n(x)\}$ берется обычная система Хаара $\{\chi_n(x)\}$, был доказан Олевским (см. ([1]), лемма 2). Доказательство же леммы 1 опирается на указанную лемму Олевского. Оказывается, что если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{21}$$

по системе Хаара обладает тем свойством, что его частные суммы ограничены и он расходится почти всюду после некоторой перестановки членов, то ряд (17) с теми же коэффициентами также обладает этими свойствами. При этом ряд (17) расходится после той же перестановки, что и ряд (21).

Лемма 2 доказывается очень просто. Положим $P(x) = \mu\,[0, x] \cap G$, $x \in G$ и рассмотрим функции

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu G}}\, r_n\left(\frac{P(x)}{\mu G}\right), \tag{22}$$

где $\{r_n(x)\}$ — система Радемахера. $\{\varphi_n(x)\}$ будет ограниченной ортонормированной системой на множестве G и поэтому

$$\lim_{k\to\infty} \int_G F(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \tag{23}$$

для любого $F(x) \in L_1[G]$. Возьмем m настолько большим, чтобы

$$\left|\int_G \varphi_k(x)\,\varphi_m(x)\,dx\right| < r, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n \tag{24}$$

Из (22) непосредственно видно, что множество G можно разделить на два множества G_1 и G_2 равной меры так, чтобы функция

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu G}}, & \text{при } x \in G_1 \\[2ex] -\dfrac{1}{\sqrt{\mu G}}, & \text{при } x \in G_2 \end{cases} \tag{24'}$$

почти всюду на G совпадала с $\varphi_m(x)$. Эта функция $\psi(x)$ будет удовлетворять условиям леммы 2.

Теперь приступим к доказательству теоремы 1. Пусть $\{\psi_n(x)\}$ сопряженная к базису $\{f_n(x)\}$ система в $L_q[0, 1]$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Обозначим через $a_i^{(0)}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, коэффициенты разложения функции $\varphi_0(x) = 1$, $x \in [0, 1]$ по базису $\{f_i(x)\}$. Имеем

$$a_i^{(0)} = \int_0^1 \psi_i(x)\,\varphi_0(x)\,dx. \tag{25}$$

Возьмем число n_1 настолько большим, чтобы имело место неравенство

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{n_1-1} a_i^{(0)} f_i(x) - \varphi_0(x) \right\|_{L_p[0,1]} < 1, \; n_0 = 0. \tag{26}$$

Предположим, что уже определены числа $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{k+1}$ и функции $\varphi_0(x), \cdots, \varphi_k(x)$, представляющие первые $k+1$ функций некоторой обобщенной системы Хаара так, что

$$\left\| \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} a_i^{(j)} f_i(x) - \varphi_j(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^j}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, k. \tag{27}$$

Легко заметить, что в силу леммы 2 можно определить $\varphi_{k+1}(x)$ таким образом, чтобы функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_k(x), \varphi_{k+1}(x)$ представляли первые $k+2$ функции некоторой обобщенной системы Хаара и чтобы имело место неравенство

$$\left\| \sum_{i=n_0}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k+1)} f_i(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^{k+2}}, \tag{28}$$

где

$$a_i^{(k+1)} = \int_0^1 \psi_i(x)\, \varphi_{k+1}(x)\, dx.$$

После этого выберем $n_{k+2} > n_{k+1}$ так, чтобы

$$\left\| \sum_{i=n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} a_i^{(k+1)} f_i(x) - \varphi_{k+1}(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^{k+2}}. \tag{29}$$

Таким образом определяются обобщенная система Хаара $\{\varphi_k(x)\}$ и натуральные числа $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$, для которых в силу (26) — (29) имеем

$$\left\| \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^k} \tag{30}$$

для любого $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Пусть ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \tag{31}$$

по построенной нами обобщенной системе Хаара удовлетворяет условиям леммы 1. Непосредственно видно, что этот ряд сходится в метрике $L_p[0, 1]$, $p > 1$. Очевидно, можно считать, что $|a_k| < 1$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, и следовательно

$$\left\| a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^k}. \tag{32}$$

Рассмотрим теперь

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) \tag{33}$$

Прежде всего заметим, что этот ряд сходится в метрике $L_p[0, 1]$. В самом деле, положим

$$S_j(x) = \sum_{k=0}^{j} a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x), \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{34}$$

Тогда для любых p' и q', $q' > p'$ в силу (32) имеем

$$\left\| S_{q'}(x) - S_{p'}(x) \right\|_{L_p[0,1]} = \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) \right\|_{L_p[0,1]} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]} + \tag{35}$$

$$+ \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \frac{1}{2^{p'}} + \left\| \sum_{k=p'+1}^{q'} a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]}.$$

Из полученного неравенства (35) и из того, что ряд (31) сходится в метрике $L_p[0, 1]$, следует, что $\| S_{q'}(x) - S_{p'}(x) \|_{L_p[0,1]}$ стремится к нулю, когда p' и q' стремятся к ∞. И, следовательно, раскрытый ряд (33) по внутренней сумме является разложением по базису $f_i(x)$ некоторой функции $f(x)$ из $L_p[0, 1]$. Для доказательства теоремы 1 достаточно проверить, что ряд (33) неограниченно расходится после некоторой перестановки его членов. Покажем, что разность рядов (31) и (33) абсолютно сходится почти всюду. Это вытекает из того, что в силу неравенства (32) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \left| a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \left\| a_k \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i^{(k)} f_i(x) - a_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p[0,1]} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty \tag{36}$$

Отсюда, так как ряд (31) неограниченно расходится почти всюду после некоторой перестановки членов, ясно, что ряд (33) тоже неограниченно расходится почти всюду после той же перестановки членов, что и ряд (31).

Таким образом, теорема 1 доказана.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ֆ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

$L_p[0,1]$, տարածության բազիսներով շարքերի զուգամիտության մասին

Ապացուցված են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1. *Թող $\{f_n(x)\}$ լինի բազիս $L_p[0,1]$, $p > 1$ տարածությունում:*

Այդ դեպքում գոյություն ունի $f(x) \in L_p[0,1]$ ֆունկցիա, որի $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ վերլուծությունը ըստ բազիսի շարքի անդամների որոշ տեղափոխությունից հետո համարյա ամենուրեք տարամիտում է։

Թեորեմ 2. Եթե $\{f_n(x)\}$ թույլ զուգամիտում է զրոյի $L_p[0,1]$-ում, ապա նրանից կարելի է անջատել $\{f_{n_k}(x)\}$ ենթասիստեմ այնպես, որ ամեն մի $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{n_k}(x)$ շարքի $L_p[0,1]$-ում զուգամիտելուց հետևի նրա համարյա ամենուրեք զուգամիտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Колмогоров. Д. Меньшов*, Sur la convergence des series de fonctions orthogonales, Math. Zeitschr, 26 (1927), 432—441. [2] *З. Загорский*, Une serie Fourier permutee d'une fonction de classe L^1 divergente presque partout, Compt. Rend. Acad. Sci., 251 (1960), 501—503. [3] *П. Л. Ульянов*, Успехи матем. наук, XVI, № 3 (1961), 61—142. [4] *А. М. Олевский*, Известия АН СССР, серия матем. т. 27 (1963), 343—366. [5] *Д. Е. Меньшов*, Sur la convergence et la sommation das series de fonctions orthogonales, Bull. Soc. math. France, 64 (1936), 147—170. [6] *С. Качмаж, Г. Штейгауз*, Теория ортогональных рядов, М., 1958