

Р. М. Мартиросян

Об одном методе исследования спектра возмущений
 самосопряженных дифференциальных операторов

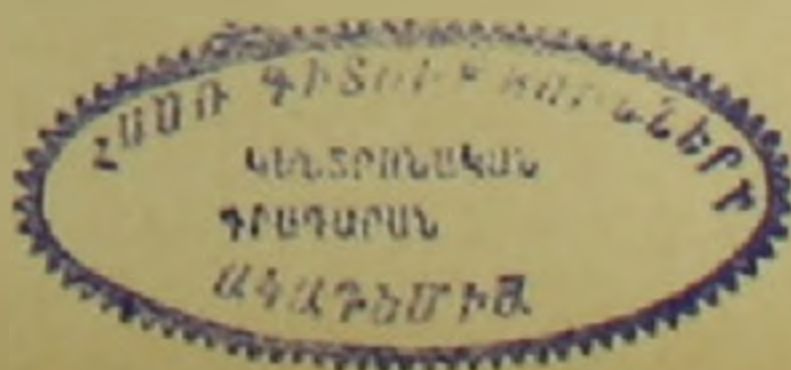
(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашьяном 27 V 1965)

Заметка посвящена исследованию спектра несамосопряженного возмущения $T = A + S^2$ самосопряженного дифференциального оператора A , где S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $q(x)$. В случаях, когда A есть дифференциальный оператор нечетного порядка $A = (-1)^n i \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}$ в $L_2(-\infty, \infty)$ или полигармонический оператор $A = (-\Delta)^k$ в $L_2(E_n)$ (где E_n — n -мерное евклидово пространство, $n \geq 3$ нечетно и $2k > n$), основной результат нашего исследования состоит в том, что если $q(x)$ экспоненциально убывает на бесконечности, то множество собственных значений возмущенного оператора T (с учетом и тех, которые лежат на спектре невозмущенного оператора A) может быть лишь конечным. Это утверждение получено путем применения некоторых предложений, верных в произвольных гильбертовых пространствах и составляющих содержание теоремы 4 и лемм 1—5, и хорошо иллюстрирует возможности предлагаемого в заметке общего метода, основанного на этих предложениях.

Перейдем к изложению упомянутых выше лемм. Условимся всюду ниже понимать под A самосопряженный оператор, определенный на плотном многообразии D_A гильбертового пространства H , а под T — замкнутый оператор, определенный формулой $T = A + S^2$ ($D_T = D_A$), где S — ограниченный (несамосопряженный) оператор. Через R_A будет обозначаться резольвента оператора A . Первые две из приводимых ниже лемм доказаны, по существу, в работе автора [1], хотя и явно не сформулированы, и поэтому мы доказательства опускаем.

Лемма 1. Если λ_0 принадлежит непрерывному спектру оператора A и для некоторой последовательности $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ операторы $SR_n S$ существуют и вполне непрерывны, то λ_0 — точка спектра оператора T .

Лемма 2. Если λ_0 не принадлежит спектру оператора A и оператор $SR_n S$ вполне непрерывен, то λ_0 — или собственное значение, или регулярная точка оператора T .



Чтобы сформулировать следующую лемму, обозначим через $A(\lambda)$ оператор, действующий в банаховом пространстве B , определенный в некоторой окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ комплексной плоскости, за исключением, быть может, самой точки $\lambda = \lambda_0$, и допускающий представление

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^r \frac{\Phi_k(\cdot, \lambda) \varphi_k}{(\lambda - \lambda_0)^{n_k}} + K(\lambda), \quad (1)$$

где $\varphi_k \in B$ ($k = 1, 2, \dots, r$), $K(\lambda)$ — ограниченный оператор, аналитически зависящий от λ в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, а $\Phi_k(\cdot, \lambda)$ — аналитические функционалы в этой окрестности, т. е. для любого ограниченного и аналитического в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$ оператора $R(\lambda)$ и любого $\varphi \in B$ функция $\Phi_k(R(\lambda)\varphi, \lambda)$ аналитична в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$. При этом мы называем оператор $R(\lambda)$ аналитическим в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$, если для любого функционала $f \in B^*$ и элемента $\varphi \in B$ функция $f(R(\lambda)\varphi)$ аналитична в указанной окрестности. Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 3. Пусть в некоторой окрестности U точки $\lambda = \lambda_0$ имеет место представление (1) и пусть радиус Фредгольма оператора $K(\lambda_0)$ больше единицы. Тогда или λ_0 не является предельной точкой собственных значений оператора $A(\lambda)$, или существует окрестность точки λ_0 , целиком состоящая из собственных значений.

Лемма 4. Пусть λ_0 не принадлежит спектру оператора A и пусть оператор SR, S вполне непрерывен для всех λ из односвязной области, содержащей точку λ_0 , а также точки вида $\lambda = \sigma + i\tau$ со сколь угодно большими вещественными τ . Тогда λ_0 не может быть предельной точкой собственных значений оператора T .

В самом деле, пусть λ — собственное значение оператора T . Тогда существует такое v , $\|v\| > 0$, что $v + R_\lambda S^2 v = 0$. Но в таком случае, как легко видеть, и уравнение $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ имеет нетривиальное решение. Итак, достаточно показать, что собственные значения уравнения $\varphi + SR_\lambda S\varphi = 0$ не могут сгущаться к λ_0 , а это следует из леммы 3, ибо $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \|R_{\sigma + i\tau} + I\| = 0$.

Лемма 5. Пусть вне спектра оператора A оператор SR, S вполне непрерывен и пусть некоторая окрестность точки λ_0 (за исключением, быть может, самой точки λ_0) не содержит собственных значений оператора A . Пусть голоморфные функции $w_1(t)$ и $w_2(s)$ определены соответственно в областях G_1 и G_2 комплексной плоскости и отображают их на некоторые окрестности U_1 и U_2 точки λ_0 . Пусть, далее, подобласти $G_1^+ \subset G_1$ и $G_2^- \subset G_2$ отображаются этими функциями однолистно на части $O_1 \subset U_1$ и $O_2 \subset U_2$ окрестностей U_1 и U_2 , отсекаемые соответственно верхней и нижней полуплоскостями. Пусть, кроме того, для всех $t \in G_1$ и $s \in G_2$ определены операторы Φ_t и Ψ_s , допускающие представление

$$\Phi_t = \sum_{k=1}^p \frac{\Phi_k(\cdot, t) \varphi_k}{(t - t_0)^{n_k}} + K_t, \quad (2)$$

$$\Psi_s = \sum_{l=1}^q \frac{\Psi_l(\cdot, s)}{(s - s_0)^{n_l}} + M_s, \quad (3)$$

где $\varphi_k, \psi_l \in H$, $w_1(t_0) = w_2(s_0) = \lambda_0$ ($t \in G_1^+$, $s_0 \in G_2^-$), а линейные функционалы $\Phi_k(\cdot, t)$ и $\Psi_l(\cdot, s)$, равно как и линейные вполне непрерывные операторы K_t и M_s , аналитически зависят от t и s соответственно в G_1 и G_2 . Если $\Phi_t \equiv SR_{w_1(t)}S$ ($t \in G_1^+$), $\Psi_s \equiv SR_{w_2(s)}S$ ($s \in G_2^-$), то точка λ_0 не является предельной точкой собственных значений (включая и лежащие на спектре оператора A) оператора T .

В самом деле, согласно лемме 3, оператор $(E + \Phi_t)^{-1}$ ($t \in G_1$) существует для всех $t \in G_1$, за исключением, быть может, конечного числа изолированных точек, ибо $\lim_{\tau \rightarrow 0} \|R_{\lambda_0 + i\tau}\| = 0$. Поэтому точка

$\lambda_0 = w_1(t_0)$ не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T , лежащих в верхней полуплоскости, ибо каждое такое собственное значение λ , попадающее в O_1 , представляется в виде $\lambda = w_1(t)$, $t \in G_1^+$, и если v — соответствующий собственный элемент, то легко видеть, что $\varphi = Sv \neq 0$ и $\varphi + SR_{w_1(t)}S\varphi = 0$, т. е. оператор $E + SR_{w_1(t)}S$ не обратим для бесчисленного множества значений t из G_1^+ , вопреки тождеству $\Phi_t \equiv SR_{w_1(t)}S$. Точно так же убеждаемся, привлекая к рассмотрению оператор Ψ_s , что λ_0 не может быть предельной точкой невещественных собственных значений оператора T , лежащих в нижней полуплоскости. Наконец, чтобы убедиться в том, что λ_0 не может оказаться предельной точкой вещественных собственных значений оператора T (лежащих на спектре оператора A), достаточно, очевидно, показать, что если λ^* принадлежит непрерывному спектру оператора A и является собственным значением оператора T , то

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} (E + SR_{\lambda_0 + i\tau}S)v = 0 \quad (\operatorname{Im} \tau = 0) \quad (4)$$

при некотором $v \in H$, $v \neq 0$, после чего останется лишь повторить вышеприведенные выкладки. Но это предельное равенство является следствием следующего более общего предложения, установленного в работе автора [2]: если λ_0 является точкой непрерывного спектра некоторого самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве H и если уравнение $Au - \lambda_0 u = f$ разрешимо, то $u = \lim_{\tau \rightarrow 0} R_{\lambda_0 + i\tau} f$ ($\operatorname{Im} \tau = 0$).

Приведем следующую теорему, на которую будем опираться ниже и доказательство которой дано в работе автора [1]. При этом заметим, что точку λ_0 мы называем, следуя Данфорду, точкой непрерывного спектра несамосопряженного оператора T , если λ_0 не является собственным значением этого оператора и многообразие $(T - \lambda_0 E)D_T$ плотно в H и незамкнуто.

Теорема А. Пусть A и V — замкнутые линейные операторы (вообще говоря, несамосопряженные и неограниченные) с плотными областями определения в гильбертовом пространстве H , а U — ограниченный линейный оператор (несамосопряженный), причем $D_A \subset D_U$. Тогда:

1) если λ_0 является регулярной точкой оператора A и

$$\|VR_{\lambda_0}U\| < 1, \quad (5)$$

где R_{λ_0} — резольвента оператора A , то оператор $T = A + UV$ замкнут и λ_0 является его регулярной точкой;

2) если точка спектра λ_0 оператора A не является собственным значением и если существует такая последовательность $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, что

$$\sup \|(\lambda_n - \lambda_0) R_{\lambda_n} \| < \infty, \quad (6)$$

$$\liminf \|VR_{\lambda_n}U\| = q < 1, \quad (7)$$

то оператор $T = A + UV$ замкнут и λ_0 принадлежит его спектру, не являясь собственным значением;

3) если $(A + UV)^* = A^* + (UV)^*$ и выполнены условия (6) и (7), то точка λ_0 непрерывного спектра оператора A остается точкой непрерывного спектра оператора $T = A + UV$.

Переходя к приложениям, рассмотрим оператор $T = A + S^2$ в $L_2(-\infty, \infty)$, где A — дифференциальный оператор нечетного порядка

$A = (-1)^n \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}$, а S — оператор умножения на $\sqrt{q(x)}$, где $q(x)$ —

комплекснозначная функция и при некотором $\varepsilon_0 > 0$ удовлетворяет условию

$$|q(x)| < Ce^{-\varepsilon_0|x|} \quad (-\infty < x < \infty). \quad (8)$$

Теорема 1. Собственные значения оператора $T = A + S^2$ (включая и вещественные), где S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$, удовлетворяющую условию (8), могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса

$$R = \left(\frac{2\pi(n+1)}{2n+1} \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)| dx \right)^{\frac{2n+1}{2n-1}} \quad (9)$$

собственных значений нет и все остальные точки вещественной оси принадлежат непрерывному спектру оператора T .

Будем считать $\operatorname{Im} i > 0$ и положим $\lambda = t^{2n+1}$, $0 < \arg t < \frac{\pi}{2n+1}$. Тогда ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_{λ} оператора A представляется в форме

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^n e^{i\frac{2\pi r}{2n+1}} e^{-i\pi r \frac{2\pi}{2n+1}(x-y)}, \quad x-y > 0 \\ \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^{n-1} e^{i\frac{(2r+1)\pi}{2n+1}} e^{-i\pi r \frac{(2r+1)\pi}{2n+1}(x-y)}, \quad x-y < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Считая $x - y$ произвольного знака, положим

$$\begin{aligned} \Phi(t, x - y) = \\ = \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \left\{ \sum_{r=0}^n e^{i \frac{2rx}{2n+1}} e^{ite^{i \frac{2rx}{2n+1}}(x-y)} - \sum_{r=0}^{n-1} e^{i \frac{(2r+1)x}{2n+1}} e^{-ite^{i \frac{(2r+1)x}{2n+1}}(x-y)} \right\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что это — целая функция по t .

Положим, наконец,

$$\begin{aligned} \Psi(t, x - y) = \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^n e^{i \frac{2rx}{2n+1}} \left\{ e^{ite^{i \frac{2rx}{2n+1}}(x-y)} - \right. \\ \left. \frac{\sum_{p=0}^{2n-1} |ite^{i \frac{2rx}{2n+1}}(x-y)|^p}{p!} \right\}. \end{aligned}$$

Ясно, что и $\Psi(t, x - y)$ — целая функция. Если, далее, обозначить через $\chi(x)$ функцию, равную 1 при положительных x и 0 при отрицательных x , то, очевидно,

$$\begin{aligned} K(x, y, \lambda) = \frac{2\pi i}{(2n+1)t^{2n}} \sum_{r=0}^n \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{e^{i \frac{2r(p+1)x}{2n+1}}}{p!} |it(x-y)|^p + \\ + \Psi(t, x - y) - \chi(y - x) \Phi(t, x - y). \end{aligned}$$

Теперь из леммы 5 немедленно следует, что $\lambda = 0$ не может быть предельной точкой собственных значений λ_k оператора T , для которых $\operatorname{Im} \lambda_k > 0$ (точно так же можно рассмотреть случай, когда $\operatorname{Im} \lambda_k < 0$). Все остальные утверждения теоремы вытекают уже из формулы (10), если воспользоваться леммами 1, 2 и 4. Наконец, из теоремы А следует, что вне круга радиуса (9) нет собственных значений оператора T , ибо очевидно, что

$$\|SR_\lambda S\| < \frac{2\pi(n+1)}{(2n+1)\|t\|^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} |q(x)| dx.$$

Перейдем, наконец, к изучению спектра несамосопряженных возмущений оператора

$$A = (-\Delta)^k \quad (11)$$

в $L_2(E_n)$, где Δ — оператор Лапласа, E_n — евклидово пространство нечетной размерности $n \geq 3$, k — целое положительное число, причем $2k > n$. Как известно, оператор $A = (-\Delta)^k$ самосопряженный и его спектр непрерывен и совпадает с положительной полуосью. Более того, как это следует из вычислений, проведенных в работе автора [2], ядро $K(x, y, \lambda)$ резольвенты R_λ этого оператора имеет вид

$$K(x, y, \lambda) = \frac{2i\pi^{\frac{n+1}{2}}}{k t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{m=0}^{k-1} e^{i m n \frac{\pi}{k}} \Phi\left(t e^{i m \frac{\pi}{k}}, x-y\right), \quad (12)$$

где положено $\lambda = t^{2k}$, $0 < \arg t < \frac{\pi}{k}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ и

$$\Phi(r, x) = \int_0^1 e^{ir|x|s} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds, \quad (13)$$

причем $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если размерность n пространства E_n нечетна, причем $n \geq 3$ и $2k > n$, то собственные значения оператора $T = A + S^2$ (включая и положительные), где A определено формулой (11), а S — оператор умножения на комплекснозначную функцию $\sqrt{q(x)}$, удовлетворяющую условию (8), могут образовать лишь конечное множество, причем вне круга радиуса

$$R = \left\{ \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int_{E_n} |q(x)| dx \right\}^{\frac{2k}{2k-n}} \quad (14)$$

собственных значений нет, и все остальные точки положительной полуоси принадлежат непрерывному спектру оператора T .

В самом деле, поскольку $\operatorname{Im}(t e^{i m \frac{\pi}{k}}) > 0$, то формулы (12) и (13) для ядра резольвенты оператора A , также условие (8) показывают, что вся положительная полуось принадлежит спектру оператора T и вне ее этот оператор может иметь лишь собственные значения, не имеющие предельных точек вне положительной полуоси. Доказательство немедленно следует из лемм 1, 2 и 4. Из теоремы А вытекает, далее, что вне круга радиуса (14) нет собственных значений оператора T , поскольку, как легко видеть,

$$\|SR, S\| \leq \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \int_{E_n} |q(x)| dx.$$

Остается показать, что ни одна точка положительной полуоси не может быть предельной для собственных значений (с учетом и положительных собственных значений!), т. е. что мы находимся в условиях применимости леммы 5. С этой целью введем обозначения

$$\psi(r, x) = \int_0^1 \left\{ e^{ir|x|s} \sum_{l=0}^{2k-n-1} \frac{(ir|x|s)^l}{l!} \right\} (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds,$$

$$\Psi(t, x) = i \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{k t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{m=0}^{k-1} \psi(te^{\frac{m\pi}{k}}, x) e^{\frac{im\pi}{k}}.$$

и

$$a_l = \frac{1}{l!} \int_0^1 s^l (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds.$$

Легко видеть, что

$$K(x, y, t) = -i \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{k t^{2k-n} \left(\frac{n-3}{2}\right)!} \sum_{p=0}^{k-\frac{n+1}{2}} \frac{a_{2p}}{1 - e^{\frac{i(2p+\pi)}{k}}} |x-y|^{2p} t^{2p} + \Psi(t, x-y).$$

Поскольку первый член правой части содержит лишь четные степени $|x-y|$, а второй член $\Psi(t, x-y)$ — целая функция по t , то условия леммы 5 выполняются, что и доказывает теорему.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՄԱՏԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԳԵՂՈՒՄԱՆ

ԻՆՏԵՂՐԱԼԱԿԱՆ ՕՍԿԻԼԱՏՈՐՆԵՐԻ ԱՆՔԻՆԻՎԱՆՈՒԹՅԱՆ ԴՐՈՒՄՆԵՐԻ ՍԱԿԼԱՐԻ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏՆԵՐԻ ՄԻ ԵՊԱՆԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Այս աշխատանքում առաջարկվում է A ինքնահամալուծ օսկիլատորի $T = A + S^2$ ալ-
ինքնահամալուծ գրգռման սպեկտրի հետազոտության մի եղանակ, որտեղ S -ը սահմանա-
փակ օսկիլատոր է: Այն հիմնված է նրա վրա, որ եթե SR, S օսկիլատորը (որտեղ R -ն A օսկի-
լատորի ռեզոլվենտն է) լիովին անընդհատ է A օսկիլատորի սպեկտրից դուրս և եթե ունի
վերջավոր չափանի մնացք (ընդհանրապես առանց որոշ ուղղանիշային մակերևույթի վրա) A
օսկիլատորի անընդհատ սպեկտրի $1 = 1_0$ կետի շրջակայքում ապա 1_0 -ն չի կարող հանդի-
սանալ T գրգռված օսկիլատորի սեփական արժեքների սահմանային կետ: Այս պնդումը
կիրառվում է $T = A + S^2$ օսկիլատորի սպեկտրի հետազոտման նկատմամբ, որտեղ
 $A = (-\Delta)^k$ պոլիհարմոնիկ օսկիլատոր է $L_2(E_n)$ տարածության մեջ, E_n -ը կենտ չափանի
էվկլիդեսյան տարածություն է և $2k > n$, իսկ S -ը բազմապատկման օսկիլատորն է անվեր-
ջությունում էրապոնենցիալ կարգի նվազող կոմպլեքսարժեք ֆունկցիայով: Ապացուցված
է, որ այդ օսկիլատորի սեփական արժեքները կարող են կազմել լոկ վերջավոր բազմու-
թյուն, ընդ որում

$$R = \left\{ \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)! E_n} \int |q(x)| dx \right\}^{\frac{2k}{2k-n}}$$

շատագուց շրջանից դուրս սեփական արժեքներ չկան: Համանման պնդում ստացված է
կենտ կարգի $A = (-1)^n \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}$ սովորական դիֆերենցիալ օսկիլատորի դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА — ՆՐԱՇԱՆԱԽՈՒՄՆԵՐ

¹ Р. М. Мартиросян, Известия АН АрмССР, физико-математ. науки, т. XIV, № 5 (1961). ² Р. М. Мартиросян, Известия АН СССР, серия матем., т. 27, № 3 (1963). ³ Р. М. Мартиросян, Известия АН СССР, серия матем., т. 28, № 1 (1964).