

Н. А. Корхмазян

Переходное излучение быстрых заряженных частиц в непрерывно-неоднородных пластинках

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Г. М. Гарибяном 3/IV 1965)

В работе (¹) было рассмотрено влияние размытой границы двух сред на переходное излучение в области частот, намного превышающих оптические $\omega \gg \omega_0$. Имеется также много работ, посвященных исследованию различных аспектов переходного излучения при резких границах.

Здесь рассмотрено переходное излучение, возникающее при прохождении быстрых, заряженных частиц через диффузную среду, изменение плотности которой приводится ниже.

1. Пусть частица с зарядом e и с постоянной скоростью v движется вдоль положительного направления оси z , пересекая плоскость $z=0$, в момент $t=0$. При этом она проходит среду, плотность электронов в которой дается функцией

$$N(z) = N_0 \cdot \left(\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)^{-2}. \quad (1)$$

Рассмотрим излучение в области $z \rightarrow +\infty$, $\omega \gg \omega_0$, если среда не магнитная и прозрачная. Для диэлектрической постоянной будем иметь:

$$\epsilon(\omega, z) = 1 + \alpha \cdot \left(\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)^{-2}, \quad \alpha = -\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi e N_0}{m}. \quad (2)$$

Введем разложения

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\vec{x}, \omega, z) \cdot \exp i(\vec{x} \cdot \vec{p} - \omega t) d\vec{x} d\omega, \dots \\ \vec{D}(\vec{x}, \omega, z) &= \epsilon(\omega, z) \cdot \vec{E}(\vec{x}, \omega, z). \end{aligned} \quad (3)$$

В соответствии с работой (1), из уравнения Максвелла получим:

$$u'' + \left\{ -V\epsilon \cdot \left(\frac{1}{V\epsilon} \right)' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \epsilon - \chi^2 \right) \right\} \cdot u = \frac{ie}{2\pi^2 c V\epsilon} \cdot e^{i \cdot \frac{\omega}{c} \cdot z} \quad (4)$$

$$\vec{H}(\vec{x}, \omega, z) = [\vec{n} \cdot \vec{x}] \cdot V\epsilon \cdot u(\vec{x}, \omega, z),$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор вдоль оси z , а штрих означает производную по z .

Как и в работе (1), возмущающий член $V\epsilon \cdot (e^{-i\omega z/c})'$ можно опустить при условии:

$$z_0 \gg \lambda \cdot |\alpha|, \quad \lambda = \frac{c}{\omega}. \quad (5)$$

Тогда имеем:

$$u'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \cdot \epsilon - \chi^2 \right) \cdot u = \frac{ie}{2\pi^2 c V\epsilon} \cdot e^{i \cdot \frac{\omega}{c} \cdot z}. \quad (6)$$

Нам необходимо определить поле u из (6), взяв в я виде (2). Вводя новую функцию (2)

$$u = \left(\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)^{-2\lambda} \cdot v, \quad (7)$$

выбирая произвольный параметр в виде

$$\lambda = i \sqrt{\frac{z_0^2 \omega^2}{4c^2} - 1} - \frac{1}{4} = \lambda_1 - \frac{1}{4} \quad (8)$$

и сделав обозначение

$$\chi = \pm i \frac{z_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \chi^2}, \quad (9)$$

для однородной части уравнения (6) получим:

$$v'' - \frac{4\lambda}{z_0} \cdot \operatorname{th} \left(\frac{z}{z_0} \right) \cdot v' + \frac{4}{z_0^2} \cdot (\lambda^2 - \chi^2) \cdot v = 0. \quad (10)$$

Знаки $(\pm)$ в (9) соответствуют значениям $\pm \omega$.

Замена переменной

$$x = -\operatorname{sh}^2 \frac{z}{z_0} \quad (11)$$

приводит к гипергеометрическому уравнению

$$x(1-x) \cdot v'' + \left[\frac{1}{2} - (1-2\lambda) \cdot x \right] \cdot v' - (\lambda^2 - \chi^2) \cdot v = 0. \quad (12)$$

2. Два независимых решения (12), пропорциональные $\exp\left(\pm \frac{2\chi}{z_0} \cdot z\right)$, при $z \rightarrow \pm \infty$ соответственно, с помощью гипергеометрических функций (F) можно написать в виде:

$$u_{1,2} = \left(\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)^{-2\lambda} \cdot \left\{ \Gamma'_1 \cdot \left(\operatorname{sh}^2 \frac{z}{z_0} \right)^{-\chi+\lambda} \cdot F_1 + \Gamma_1^2 \cdot \left(\operatorname{sh}^2 \frac{z}{z_0} \right)^{\chi+\lambda} \cdot F_2 \right\} \mp$$

$$\mp \left(\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)^{-2\lambda} \cdot \operatorname{sh} \frac{z}{z_0} \cdot \left\{ \frac{\Gamma'_1 \cdot \Gamma'_2}{\Gamma_2^2} \cdot \left(\operatorname{sh}^2 \frac{z}{z_0} \right)^{\chi+\lambda-1/2} \cdot F_2 + \Gamma'_1 \cdot \left(\operatorname{sh}^2 \frac{z}{z_0} \right)^{-\chi+\lambda-1/2} \cdot F_1 \right\},$$

где

$$\Gamma_1^{1,2} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(\mp 2\chi)}{\Gamma(\mp \chi - \lambda) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} \mp \chi + \lambda\right)},$$

$$\Gamma_2^{1,2} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma(\pm 2\chi)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \chi - \lambda\right) \cdot \Gamma(1 \pm \chi + \lambda)},$$

$$F_{1,2} = F\left(\pm \chi - \lambda, \pm \chi - \lambda + \frac{1}{2}, \pm 2\chi + 1, -\operatorname{sh}^{-2} z/z_0\right).$$

Из асимптотических видов решений (13) найдем вронскиан:

$$w = -\frac{8\chi}{z_0} \cdot \Gamma'_1 \cdot \Gamma_{-}, \quad \Gamma_{+} = \frac{\Gamma_1^2 \cdot \Gamma_2^2 \pm \Gamma'_1 \cdot \Gamma'_2}{\Gamma_2^2}.$$

Частные решения однородного уравнения при $z \rightarrow +\infty$, возьмем из (13)

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\chi} \cdot \Gamma_{-} \cdot e^{\frac{2\chi}{z_0} z} \cdot F(z \rightarrow +\infty),$$

$$u_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2\chi} \cdot 2\Gamma'_1 \cdot e^{-\frac{2\chi}{z_0} z} \cdot F(z \rightarrow +\infty) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\chi} \cdot \Gamma_{+} \cdot e^{\frac{2\chi}{z_0} z} \cdot F_2(z \rightarrow +\infty).$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (6) можно написать в виде:

$$\frac{w}{b} \cdot u = u_1 \int u_2 \cdot e^{i \cdot \frac{w}{b} \cdot z} \cdot dz - u_2 \cdot \int u_1 \cdot e^{i \cdot \frac{w}{b} \cdot z} \cdot dz + c_1 u_1 + c_2 u_2$$

$$\sqrt{\varepsilon} \simeq 1, \quad b = -\frac{ie}{2\pi^2 c}.$$

При этом возникают интегралы, которые можно взять используя интегральное представление Барнса для гипергеометрических функций (1.4)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s) \Gamma(\beta+s) \Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)} (-t)^s \cdot ds.$$

Здесь $|\arg(-t)| < \pi$, и пусть интегрирования в плоскости комплексного переменного z выбраны так, чтобы полюсы функций $\Gamma(\alpha + s)$ $\Gamma(\beta + s)$ лежали слева от пути, а полюсы функции $\Gamma(-s)$ — справа от нее. Отбрасывая вклад из полюсов функции $\Gamma(-s)$, как поле частицы (1), для поля излучения получим:

$$\frac{w}{b} \cdot u = \frac{u_1 \cdot z_0}{4} \cdot \left\{ \Gamma_+ \cdot I(\chi, \sigma) + 2 \Gamma_1' \cdot I(-\chi, \sigma) \right\} - \frac{u_2 \cdot z_0}{4} \cdot \Gamma_- \cdot I(\chi, \sigma) + c_1 u_1 + c_2 u_2, \quad (19)$$

где

$$I(\chi, \sigma) = 2^{2\sigma} \cdot \frac{\Gamma(1-2\chi) \cdot \Gamma(\sigma-\lambda) \cdot \Gamma\left(\sigma-\lambda+\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(-\chi-\sigma)}{\Gamma(-\chi-\lambda) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}-\chi-\lambda\right) \cdot \Gamma(1-\chi+\sigma)},$$

$$\sigma = i \cdot \frac{z_0^{10}}{2v}. \quad (20)$$

Аналогично для области $z \rightarrow -\infty$ будем иметь:

$$\frac{w}{b} \cdot u = \frac{u_2 \cdot z_0}{4} \left\{ \Gamma_+ \cdot I(\chi, -\sigma) + 2 \Gamma_1' \cdot I(-\chi, -\sigma) \right\} - \frac{u_1 \cdot z_0}{4} \cdot \Gamma_- \cdot I(\chi, -\sigma) + c_1 u_1 + c_2 u_2. \quad (21)$$

По условию излучения из (20, 21) находим $c_{1,2} = \frac{z_0}{4} \cdot \Gamma_- \cdot I(\chi, \pm \sigma)$, после чего поля излучения принимают вид:

$$u_{z \rightarrow \pm \infty} = \frac{u_{1,2} \cdot z_0 \cdot b}{4w} \cdot \left\{ \Gamma_+ \cdot I(\chi, \pm \sigma) + 2 \Gamma_1' \cdot I(-\chi, \pm \sigma) + \Gamma_- \cdot I(\chi, \mp \sigma) \right\}. \quad (22)$$

Если обозначить $\vec{H}(\vec{x}, \omega, z) \equiv (H_1, H_z)$ и аналогично для электрического поля, то из системы уравнений для фурье-компонент электромагнитного поля можно получить $H_z = 0$, а для тангенциальной компоненты электрического поля:

$$\vec{E}_t(\vec{x}, \omega, z) = i \cdot \frac{c}{\omega} \cdot \frac{2\chi}{z_0} \cdot \left| \vec{n} \cdot \vec{H}_t(\vec{x}, \omega, z) \right|. \quad (23)$$

Рассмотрим поток вектора Пойнтинга через весьма удаленную плоскость, перпендикулярную к оси z . С учетом (3), (23) и второго из (4) можем написать

$$S = \frac{c}{4\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{E}_t(\vec{r}, t) \cdot \vec{H}_t(\vec{r}, t)|_z \cdot dx dy dt =$$

$$= \frac{4i\pi^2 c^2}{z_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi \cdot x^2}{\omega} \cdot u(\vec{x}, \omega, z) \cdot u(-\vec{x}, -\omega, z) \cdot d\vec{x} \cdot d\omega. \quad (24)$$

Имея цель в дальнейшем рассмотреть случай $\beta = \frac{v}{c} \rightarrow 1$, при котором для излучения существенны малые углы θ , и предположив $z_0 \gg \lambda_0 = c/\omega_0$, что не противоречит условию (5), имеем:

$$|\sigma| = \left| \frac{z_0 \cdot \omega}{2v} \right| \simeq |\chi| = \left| \frac{z_0 \cdot \omega}{2c} \cos \theta \right| \gg \lambda_1, \quad (25)$$

$$\lambda_1 = \frac{z_0 \cdot \omega_0}{2c} \gg 1, \quad |\sigma - \chi| \ll 1.$$

Учитывая условия (25) и воспользовавшись соотношениями и разложениями для Γ -функции, после достаточно длинных и тонких оценок, из (22) можно получить

$$u(\vec{x}, \omega, z) = \frac{ie \cdot z_0^2}{8\pi^2 \cdot c \cdot \chi^2} \cdot \frac{\lambda_1^2}{\sigma - \chi} \cdot e^{\frac{2\chi}{z_0} \cdot z}, \quad \lambda_1 = i\lambda_1. \quad (26)$$

Таким образом, по формуле (24)

$$S = \frac{e^2 \cdot z_0^3 \cdot \lambda_1^4}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\kappa^3 \cdot d\kappa d\omega}{\omega \cdot \kappa^3 (\sigma - \chi)^2}, \quad \sigma = i\sigma, \quad \chi = i\chi. \quad (27)$$

Здесь $\kappa = \frac{\omega}{c} \cdot \sin \theta$, $d\kappa = \kappa d\kappa d\varphi$, $\int d\varphi = 2\pi$ и интеграл по ω в пределах $(-\infty, +\infty)$ заменен удвоенным интегралом в пределах $(0, +\infty)$, так как подынтегральное выражение есть четная функция от ω .

Подставим, далее, значения κ , σ , χ в (27):

$$S \simeq \frac{8e^2 \cdot \beta \cdot v \cdot \lambda_1^4}{\pi z_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta \cdot d\theta}{\cos^2 \theta \cdot (1 - \beta \cdot \cos \theta)^2} \cdot \int_{\omega_0}^\infty \frac{d\omega}{\omega^2}. \quad (28)$$

Так как излучение в основном испускается под малыми углами ($\theta \sim \sqrt{1-\beta^2}$), то при вычислении интеграла по θ можно положить $\cos^2 \theta \simeq 1$, $1 - \beta \cdot \cos \theta \simeq 1 - \beta + \beta \cdot \frac{\theta^2}{2}$, $\sin \theta \simeq \theta$ и пределами интегрирования взять, например, $(0, 1/2)$.

Вспоминая также, что $\lambda_1 = \frac{z_0 \cdot \omega_0}{2c}$, получим окончательный результат:

$$S \simeq \frac{2e^2 \cdot \omega_0}{\pi c} \cdot \frac{z_0^2}{\lambda_0^2} \cdot \ln \frac{E}{m_0 c^2}, \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (29)$$

Причем для каждой данной z_0 , удовлетворяющей условию $\lambda_0 \ll z_0 \ll \lambda_0/(1-\beta)$, частота излучения находится в пределах:

$$\omega_0 \ll \omega \ll c/z_0(1-\beta). \quad (30)$$

Таким образом, при указанных условиях полное излучение логарифмически зависит от энергии частицы, в отличие от случая пластинки с резкими границами, где эта зависимость линейная (^{5,6}). Укажем, что в некоторых подобных случаях логарифмическая зависимость энергии излучения от энергии частицы получается также и при одной размытой границе (^{1,7}).

Институт радиофизики и электроники
Академии наук Армянской ССР

Ն. Ա. ՂՈՐԽՄԱԶՅԱՆ

Լիցքավորված արագ մասնիկների անցումային ճառագայթումը անընդհատ անհամասեռ թիթեղներում

Վերջին տարիներս կատարվել են մեծ թվով աշխատանքներ, որոնք վերաբերվում են անցումային ճառագայթման առանձնահատկությունների ուսումնասիրմանը: Սակայն դրույթյուն ունեն ընդամենը երկու աշխատանք, որոնք վերաբերվում են միջավայրերի բաժանման սահմանի աղավաղման աղդեցություններ, այդ ճառագայթման վրա:

Ուսումնասիրությունների այդ շարքում, առանձնահատուկ ուշադրություն է արժանացել բարակ թիթեղներում արագ մասնիկների առաջացած անցումային ճառագայթման հարցը:

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրված է անընդհատ անհամասեռ թիթեղներում արագ մասնիկների արձակած անցումային ճառագայթման սպեկտրը և լրիվ ինտենսիվությունը: Որպես անընդհատ անհամասեռ թիթեղ հասկացվում է այնպիսի միջավայր, որի խտությունը Z առանցքի ուղղությամբ, փոխվում է $N = N_0 \cdot \left(\operatorname{ch} \frac{z}{z_0} \right)^{-2}$ օրենքով: Լիսպի-

վ միջավայրը կարելի է ընդունել որպես մի «թիթեղ», որի եզրերի անհամասեռություններն արժանանում են թիթեղի հաստությունը նույն կարգի են: Սույն է տրված, որ ճառագայթված լրիվ էներգիան, լողարիթմական ֆունկցիա է մասնիկի էներգիայից, ի տարբերություն կտրուկ նիստերով թիթեղի դեպքից, որում այդ կախումը զծային է: Ըստ որում, $\lambda_0 \ll z_0 \ll \lambda_0 / (1 - \beta)$ պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր z_0 -ի համար ճառագայթման հաճախությունը դրվում է $\omega_0 \ll \omega \ll c/z_0(1 - \beta)$ տիրույթում, որտեղ, ω_0 միջավայրի մեծագույն խտությունը համապատասխանող օպտիկական հաճախությունն է, $\beta = v/c$, $\lambda_0 \omega_0 = c$ և c -ն լույսի արագությունն է դատարկության մեջ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. Ц. Амагуни, Н. А. Корхмазян, ЖЭТФ, 39, 4 (10), 1960. ² И. И. Гольдман, В. Д. Кривченков, Сборник задач по квантовой механике, Гостехиздат, § 1, задача 11, 1957. ³ Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, Гостехиздат, ч. II, стр. 71, 1934. ⁴ Г. М. Гарибян, ЖЭТФ, 37, 527, 1959. ⁵ Г. М. Гарибян, ДАН АрмССР, т. 33, № 3, 105 (1961). ⁶ Н. А. Корхмазян. Диссертация, ФИАН, 1962.