ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLI 1965 3

МАТЕМАТИКА

А. М. Бадалян

Параметрическое представление классов мероморфных в круге функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 10/VII 1965)

В недавней работе М. М. Джрбашяна [1] были анонсированы новые результаты о параметрическом представлении мероморфных в круге функций.

Путем обобщения формулы Йенсена—Неванлинна, произведения Бляшке и характеристической функции Р. Неванлинна в указанной работе были введены новые классы N_α $(-1<\alpha<\infty)$ мероморфных в круге функций и были установлены параметрические представления этих классов.

Класс N_α определяется с помощью оператора дробного интегро-дифференцирования по Риману—Лиувиллю, причем при $\alpha=0$ совпадает с классом N функций ограниченного вида, введенного Р. Неванлинна.

В настоящей заметке, применяя метод М. М. Джрбашяна, мы приводим параметрическое представление более широких классов мероморфных в единичном круге функций.

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и помощь, оказанную им при выполнении настоящей работы.

1°. Пусть $\alpha(r)$ произвольная неубывающая функция ограниченного изменения на $[0; 1]$, для которой

$$\alpha(1)=0; \qquad \int_0^1 d\alpha(r)>0.$$

Обозначим через λ_n моменты меры $d\alpha(r)$ на $[0; 1]$

$$\lambda_n=\int_0^1 r^n\, d\alpha(r) \qquad (n=0;\ 1;\ 2;\cdots).$$

Из легко проверяемого равенства

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lambda_n} = 1,$$

следует, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda_n} = \bar{C}(z)$$

представляет голоморфную в круге $|z| < 1$ функцию $\bar{C}(z)$. Определим оператор L следующим образом

$$L\varphi(z) = \int_0^1 \varphi(\rho z)\, d\alpha(\rho), \tag{1}$$

тогда справедлива

Лемма 1. *Пусть функция*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{2}$$

голоморфна в круге $|z| < R$ $(R > 1)$. Тогда функция

$$\text{a)} \qquad L f(z) = \int_0^1 f(\rho z)\, d\alpha(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_k z^k \tag{3}$$

также голоморфна в круге $|z| < R$.

б) *Справедливы интегральные формулы*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Lf(e^{i\varphi})\, \bar{C}\left(\frac{z}{\rho} e^{-i\varphi}\right) d\varphi, \qquad (|z| < \rho < R) \tag{4}$$

$$f(z) = -\overline{f(0)} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} L\, \mathrm{Re}\, f(e^{i\varphi})\, \bar{C}\left(\frac{z}{\rho} e^{-i\varphi}\right) d\varphi, \qquad (|z| < \rho < R). \tag{5}$$

Пусть функция $F(z)$ мероморфна в круге $|z| < 1$ и пусть $\{a_k\}^\infty$ и $\{b_k\}^\infty$ суть соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z = 0$ и занумерованных в порядке неубывания их модулей

$$0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots \leqslant |a_\mu| \leqslant \cdots$$

$$0 < |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \cdots \leqslant |b_\nu| \leqslant \cdots$$

Пусть, далее,

$$F(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \cdots \qquad (c_\lambda \neq 0)$$

— есть разложение $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = 0$.

При помощи формулы (5) леммы 1 устанавливается

Лемма 2. *Для любого r $(0 < r < 1)$ справедлива формула*

$$\log F(z) = i \arg c_\lambda + \lambda \log \frac{z}{r} - \frac{\lambda}{\lambda_0} \int_0^1 \log t\, d\alpha(t) +$$

$$+\sum_{0<|a_\mu|<r}\log\left\{\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{-\overline{W}\left(\frac{z}{r};\,\frac{a_\nu}{r}\right)}\right\}-$$

$$-\sum_{0<|b_\nu|<r}\log\left\{\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)e^{-\overline{W}\left(\frac{z}{r};\,\frac{b_\nu}{r}\right)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\overline{S}\left(\frac{z}{r}e^{-i\varphi}\right)d\varphi\int_0^1\log|F(r\rho e^{i\varphi})|\,d\alpha(\rho), \tag{6}$$

где

$$\overline{S}\left(\frac{z}{r}e^{-i\varphi}\right)=2\overline{C}\left(\frac{z}{r}e^{-i\varphi}\right)-\overline{C}(0),$$

$$\overline{W}(z;\zeta)=\frac{1}{\lambda_0}\int_{|\zeta|}^1\frac{\alpha(t)}{t}\,dt-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\lambda_n}\left[\zeta^{-n}\int_0^{|\zeta|}t^{n-1}\alpha(t)\,dt-\overline{\zeta}^n\int_{|\zeta|}^1 t^{-n-1}\alpha(t)\,dt.\right. \tag{7}$$

С учетом асимптотических свойств функции $\overline{W}(z;\zeta)$ доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{z_k\}^{\infty}$, $(0<|z_k|<1)$ — *бесконечная последовательность комплексных чисел, отличных от нуля, упорядоченных в порядке возрастания модулей*

$$0<|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\cdots$$

и удовлетворяющих условию

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{z_k}^1\alpha(t)\,dt<+\infty. \tag{8}$$

Тогда

а) бесконечное произведение

$$\overline{B}(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-\overline{W}(z;\,z_k)} \tag{9}$$

равномерно и абсолютно сходится в любой замкнутой подобласти круга $|z|<1$, представляя аналитическую функцию, обращающуюся в нуль лишь на последовательности $\{z_k\}^{\infty}$;

б) для любого $r(0<r<1)$ и $\theta\,[0\leqslant\theta\leqslant2\pi]$ имеем

$$L\log|\overline{B}(z;z_k)|\leqslant0. \tag{10}$$

2°. Перейдем теперь к определению классов мероморфных функций $N(\alpha(r))$.

Пусть $n(t; 0)$ и $n(t; \infty)$ соответственно числа чисел $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ в круге $|z| \leq t$, а $n(0; 0)$ и $n(0; \infty)$ означают кратность нуля или полюса функции $F(z)$ в начале координат $z=0$, так что будем иметь

$$n(0; 0) - n(0; \infty) = \lambda.$$

Введем в рассмотрение функции

$$\bar{N}(r; 0) = \int_0^r \frac{\alpha\left(\frac{t}{r}\right)}{t}[n(t; 0) - n(0; 0)]\, dt +$$

$$+ n(0; 0)\left[\int_0^1 \log t\, d\alpha(t) + \lambda_0 \log r\right]$$

$$\bar{N}(r; \infty) = \int_0^r \frac{\alpha\left(\frac{t}{r}\right)}{t}[n(t; \infty) - n(0; \infty)]\, dt +$$

$$+ n(0; \infty)\left[\int_0^1 \log t\, d\alpha(t) + \lambda_0 \log r\right].$$

Далее положим

$$L^{(+)}\varphi(r) = \begin{cases} L\varphi(r) & \text{при} \quad L\varphi(r) \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad L\varphi(r) \leq 0 \end{cases}$$

$$L^{(-)}\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad L\varphi(r) > 0 \\ -L\varphi(r) & \text{при} \quad L\varphi(r) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что

$$L\varphi(r) = L^{(+)}\varphi(r) - L^{(-)}\varphi(r).$$

Обозначим, наконец,

$$\bar{m}(r; 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(-)} \log|F(re^{i\varphi})|\, d\varphi;$$

$$\bar{m}(r; \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L^{(+)} \log|F(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Лемма 3. *Справедливо тождество*

а) $$\bar{m}(r; \infty) + \bar{N}(r; \infty) = \bar{m}(r; 0) + \bar{N}(r; 0) + \lambda_0 \log|c_\lambda| \quad (11)$$

б) *функция*

$$\bar{T}_F(r) = \bar{m}(r; \infty) + \bar{N}(r; \infty) \qquad 0 < r < 1 \quad (12)$$

монотонно возрастающая.

Функцию $\overline{T}_F(r)$ будем называть обобщенной характеристикой мероморфной функции $F(z)$.

Через $N(\alpha(r))$ обозначим класс мероморфных в круге $|z|<1$ функций, для которых выполнено следующее условие

$$\overline{T}_F(1)=\lim_{r\to 1-0}\overline{T}_F(r)<+\infty. \qquad (13)$$

Через $N^*(\alpha(r))$ обозначим класс мероморфных функций, для которых

$$T_F^*(r;F)=\int_0^1 T_F(rt)\,d\alpha(t)<\int_0^1 T_F(t)\,d\alpha(t)<+\infty, \qquad r<1 \qquad (14)$$

где $T_F(r)$ характеристическая функция Неванлинна функции $F(z)$, $\alpha(t)$ любая неубывающая функция ограниченного изменения. Тогда справедливо включение классов

$$N^*(\alpha(r))\subset N(\alpha(r)). \qquad (15)$$

Из определения класса $N^*(\alpha(r))$ легко вытекает, что

$$N^*(\alpha_2(r)\subset N^*(\alpha_1(r)), \qquad (16)$$

если $\alpha_1(r)\leqslant\alpha_2(r)$.

Теорема 2. *Класс $N(\alpha(r))$ совпадает с множеством функций, допускающих в круге $|z|<1$ представление вида*

$$F(z)=C_F z^{\lambda}\frac{\overline{B}(z;a_\mu)}{\overline{B}(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{S}(ze^{-i\varphi})\,d\psi(\varphi)\right\}, \qquad |z|<1$$

где

$$\overline{S}(z)=2\overline{C}(z)-\overline{C}(0)=\frac{1}{\lambda_0}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\lambda_k}$$

$\overline{B}(z;a_\mu)$ и $\overline{B}(z;b_\nu)$ сходящиеся произведения, $\psi(\theta)$ произвольная функция ограниченного изменения на $[0;2\pi]$, а C_F — любая постоянная.

Теорема 3. *Пусть*

$$F(z)\in N(\alpha(r))$$

и

$$F(z)=e^{i\gamma-\frac{\lambda}{\lambda_0}\int_0^1 \log t\,d\alpha(t)}\, z^{\lambda}\,\frac{\overline{B}(z;a_\mu)}{\overline{B}(z;b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{S}(ze^{-i\theta})\,d\psi(\theta)\right\}$$

есть ее представление.

Тогда почти всюду существует предел

$$Q(\theta;F)=\lim_{r\to 1-0}L\{\log|F(re^{i\theta})|\}, \qquad (17)$$

причем

$$Q(\theta;F)=\psi(\theta)\in L(-\pi,\pi). \tag{18}$$

3°. Обозначим через $A(\alpha(r))$ класс тех аналитических в единичном круге функций, для которых выполняется следующее условие

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_0^{2\pi} L^{(+)}\log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi\right\}<+\infty.$$

Очевидно, что

$$A(\alpha(r))\subset N(\alpha(r)).$$

Теорема 4. *Пусть голоморфная в круге* $|z|<1$ *функция принадлежит классу* $A(\alpha(r))$, *тогда*

1°. *Если граничные значения*

$$Q(\theta;f)=\lim_{r\to 1-0} L\,[\log|f(re^{i\theta})|]$$

таковы, что

$$\int_0^{2\pi} Q(\theta;f)\,d\theta=-\infty, \tag{19}$$

то

$$f(z)\equiv 0.$$

2°. *Пусть последовательность точек* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{|z_k|}^{1}\alpha(t)\,dt>-\infty. \tag{20}$$

Если

$$f(z_k)=0,$$

то

$$f(z)\equiv 0.$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Մ. ԲԱԴԱԼՅԱՆ

Շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների դասի պարամետրական ներկայացում

Մ. Մ. Ջրբաշյանի աշխատանքում (¹) ներմուծված են շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նոր դասեր՝ N_α և ստացված է այդ դասերի պարամետրական ներկայացում, ընդ որում N_α $(-1<\alpha>\infty)$ դասը $\alpha=0$ դեպքում համընկնում է Նևանլիննայի կողմից ներմուծված սահմանափակ տիպի ֆունկցիաների դասի հետ։

Ներկա աշխատանքում կիրառելով Մ. Ջրբաշյանի մեթոդը տվյալ $\alpha(r)$ չնվազող սահմանափակ վարիացիայի ֆունկցիայի համար սահմանվում է $N(\alpha(r))$ դաս և բերվում է նրանց պարամետրական ներկայացումը։ $N(\alpha(r))$ դասը համընկնում է այն ֆունկցիաների դասի հետ, որոնք միավոր շրջանում ներկայացվում են հետևյալ տեսքով՝

$$F(z) = C_F z^{\nu} \frac{\bar{B}(z; a_{\mu})}{\bar{B}(z; b_{\nu})} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{S}(ze^{-i\varphi})\, d\psi(\varphi) \right\} \qquad |z| < 1$$

որտեղ

$$\bar{S}(z) = \frac{1}{\lambda_0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda_n}, \qquad \lambda_n = \int_0^1 \rho^n\, d\alpha(\rho)$$

$\bar{B}(z; a_{\mu})$ և $\bar{B}(z; b_{\nu})$ զուգամետ արտադրյալներ են, $\psi(\varphi)$-ն վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա է, իսկ C_F-ը կամայական հաստատուն է։

Կարևոր է նաև հետևյալ արդյունքը։

Եթե $F(z) \in N(\alpha(r))$ դասին, ապա համարյա բոլոր $\theta \in [0, 2\pi]$-ների համար գոյություն ունի հետևյալ սահմանը

$$Q(\theta, F) = \lim_{r \to 1-0} L \log |F(re^{i\theta})| = \psi'(\theta)$$

ընդ որում

$$\psi'(\theta) \in L(0; 2\pi)$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, 157, № 5 (1964).