ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLI 1965 3

МАТЕМАТИКА

А. Н. Кочетков

Экстремальные задачи с несимметричными дополнительными условиями в некоторых классах аналитических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 17/II 1965)

В настоящей заметке приводится ряд результатов, главным образом качественного характера, об экстремальных задачах в различных классах аналитических функций. Рассматриваемые классы функций выделяются путем указания некоторого основного ограничения, действующего на границе области определения, и дополнительных ограничений, задаваемых на некоторых множествах, лежащих внутри области определения. Основой исследования является установление двойственной связи между рассматриваемой экстремальной задачей и некоторой другой задачей. Метод двойственности для экстремальных задач с дополнительными условиями в классах аналитических функций изложен в обзорной статье С. Я. Хавинсона ([1]). Однако рассматриваемые там ограничения, выделяющие классы, являются симметричными. Это означает, что изучавшиеся классы функций образовывали симметричные выпуклые множества в соответствующих пространствах. В настоящей работе мы так видоизменяем метод, что его удается теперь применить к несимметричным классам функций.

Теорема 1. *Пусть K — выпуклый компакт, I — топологическое пространство. Предположим, что функция $F(x, v)$, заданная на $K \times I$, обладает следующими свойствами: 1) при любом фиксированном $v \in I$ функция $F(x, v)$ выпукла и полунепрерывна снизу по x; 2) при любом фиксированном $x \in K$ функция $F(x, v)$ является бэровской функцией на I. Обозначим через S множество $\{x : x \in K;\ F(x, v) < 0,\ v \in I\}$. Тогда для вогнутой полунепрерывной сверху функции $d(x)$ на K справедливо соотношение*

$$\max_{x\in S} g(x) = \inf_{\lambda>0}\max_{x\in K}\left[g(x) - \int_I F(x, v)\,d\lambda(v)\right], \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем неотрицательным бэровским мерам на I. Заметим, что мы пишем max в тех случаях, когда верхняя грань достигается. Теорема 1 является некоторым видоизменением результата Фань-Цзи ([2]).

Лемма 1. *Пусть в условиях теоремы 1 $I = I_1 \cup I_2$, где I_1 — выпуклое множество в линейном пространстве, и пусть существует подмножество $N \subset I_1$, такое, что для любого $v \in I_1$, $v \neq 0$, найдется $t > 0$, при котором $tv \in N$. Предположим, далее, что на I_1 $F(x, v)$ линейна по v при любом $x \in K$; тогда*

$$\max_{x \in S} g(x) = \inf_{\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0} \max_{x \in K} \left[g(x) - \lambda_1 F(x, v) - \int_{I_2} F(x, v\, d\lambda)_2 (v) \right], \tag{2}$$

где нижняя грань берется по любым неотрицательным числам λ_1, неотрицательным бэровским мерам $\lambda_2(v)$ на I_2 и любым $v_1 \in N$.

Лемма 2. *Пусть, кроме требований теоремы 1 и леммы 1, выполняются следующие условия: при взятии* inf *в правой части равенства (2) меры $\lambda_2(v)$ можно считать ограниченными, и существуют $\sigma > 0$ и $d > 0$ такие, что для любой меры $\lambda_2(v) \geq 0$, для которой $\int_{I_2} d\lambda_2(v) \leq d$, и любого $v_1 \in N$ справедливо неравенство*

$$\min_{x \in K} \left[F(x, v_1) + \int_{I_2} F(x, v)\, d\lambda_2(v) \right] \leq -\sigma,$$

тогда в правой части (2) числа λ_1 можно считать ограниченными.

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям леммы 2 выпуклая оболочка множества N секвенциально компактна, I_2 — компактно и функция $F(x, v)$ обладает свойствами: 1) $F(x, v)$ при любом $x \in K$ непрерывна по v на I_2, 2) $F(x, v)$ непрерывна по x на K, причем равномерно относительно $v \in I_2$, 3) существует подмножество $K_1 \subset K$, всюду плотное в K и такое, что при любом $x \in K_1$ функция $F(x, v)$ непрерывна по v на I_1. Тогда нижняя грань в (2) достигается при некоторых $\lambda_1^* \geq 0$, $\lambda_2^*(v) \geq 0$, $v_1^* \in N$ или $v_1^* = 0$.*

Число λ_1 можно рассматривать как меру, сосредоточенную в точке v_1. Меры λ_1^*, сосредоточенную в v_1^*, и $\lambda_2^*(v)$, на которых достигается inf в правой части (2), назовем экстремальными мерами, а элемент x^*, на котором достигается $\max g(x)$ на S, назовем экстремальным элементом.

Теорема 3. *Если элемент x^*, меры λ_1^* и $\lambda_1^*(v)$ экстремальные, то*

$$\lambda_1^* F(x^*, v_1^*) + \int_{I_2} F(x^*, v)\, d\lambda_2^*(v) = 0.$$

Применим полученные результаты к некоторым классам аналитических функций. Пусть G n — связная область, ограниченная контурами Γ_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\Gamma = \bigcup_{1}^{n} \Gamma_i$, и в G выделено замкнутое множество F. Пусть на Γ заданы ограниченные измеримые функции $a(\zeta)$

и $\rho(\zeta)>0$, а на F заданы непрерывные функции $b(z)$ и $\varepsilon(z)>0$. Рассмотрим класс S ограниченных аналитических в G функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям: а) $|f(\zeta)-a(\zeta)|<\rho(\zeta)$ п. в. на Γ и б) $\left|\sum_0^m \gamma_i f^{(i)}(z)-b(z)\right|<\varepsilon(z)$ при $z\in F$, где γ_i — заданные комплексные числа. В дальнейшем будем предполагать, что класс S не пуст. Нашей задачей является исследование свойств функций, дающих $\max\left|\sum_0^r c_i f^{(i)}(z_0)\right|$ в классе S, где $z_0\in G\setminus F$ и не отделяется множеством F от Γ, c_i — заданные комплексные числа. Множество функций $f(\zeta)$ на Γ, равных почти всюду граничным значениям функций из S, также будем обозначать буквой S.

Обозначим через K множество измеримых ограниченных функций на Γ с топологией пространства L_1^* и удовлетворяющих условию а). Тогда K станет компактом. Введем еще следующие обозначения:

$$K_0(\zeta,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^r\frac{i!\,c_i}{(\zeta-z_0)^{i+1}};\qquad K(\zeta,z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^m\frac{i!\,\gamma_i}{(\zeta-z)^{i+1}};$$

$$m(f,\varphi)=\int_\Gamma f(\zeta)\varphi(\zeta)d\zeta,$$

где $\varphi(\zeta)$ из класса E_1 в области G,

$$g_0(f)=\int_\Gamma f(\zeta)K_0(\zeta,z_0)\,d\zeta,\qquad g(f,z)=\int_\Gamma f(\zeta)K(\zeta,z)\,d\zeta-b(z);$$

здесь $f(\zeta)\in K$. Множество S есть решение системы неравенств

$$\operatorname{Re} m(f,\varphi)<0,\qquad \varphi\in E_1,$$

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha}g(f,z)-\varepsilon(z)\leqslant 0,\qquad z\in F,\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi.$$

Пусть β такое, что $\max\limits_{f\in S}|g_0(f)|=\max\limits_{f\in S}e^{i\beta}g_0(f)$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\max_{f\in S}\operatorname{Re}e^{i\beta}g_0(f)=\inf_{\lambda_1\geqslant 0,\,\lambda_2}\max_{f\in K}\operatorname{Re}\left\{e^{i\beta}\int_\Gamma f(\zeta)\left[K_0(\zeta,z_0)-\lambda_1\varphi(\zeta)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\iint_F K(\zeta,z)d\lambda_2(z)\right]d\zeta+e^{i\beta}\iint_F b(z)\,d\lambda_2(z)+\iint_F\varepsilon(z)\,d\,|\lambda_2(z)|\right\},\qquad (3)$$

где $\inf$ *берется по всевозможным* $\lambda_1\geqslant 0$, *комплексным мерам* $\lambda_2(z)$ *на* F *и* $\varphi(z)\in E_1$, *с нормировкой* $\int_\Gamma|\varphi(\zeta)|\,d\zeta=1$.

Лемма 4. *Если существует такая функция* $f_0(z) \in S$, *что* $|f_0(z) - b(z)| < \varepsilon(z)$ *при* $z \in F$, *то при взятии* inf *в* (3) *меры* λ_1 *и* $\lambda_2(z)$ *можно считать ограниченными.*

Лемма 5. *Если существует функция* $f_1(z) \in S$ *и число* $d > 0$, *для которых выполняется неравенство* $|f_1(\zeta) - a(\zeta)| < \rho(\zeta) - d$, *то существует число* $\sigma > 0$ *такое, что*

$$\min_{\in K} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta} \int_\Gamma f(\zeta) \left[\varphi(\zeta) + \iint_F K(\zeta, z)\, d\lambda_2(z) \right] d\zeta - e^{i\beta} \iint_F b(z)\, d\lambda_2(z) - \right.$$

$$\left. - \iint_F \varepsilon(z)\, d\,|\lambda_2(z)| \right\} \leqslant -\sigma$$

при любых $\varphi(z) \in E_1$ *и* $\lambda_2(z)$ *с нормировкой* $\int_\Gamma |\varphi(\zeta)|\, d\zeta = 1$ *и* $\iint_F d\,|\lambda_2(z)| \leqslant 1$.

Теорема 4. *Обозначим* $K_0(\zeta, z_0) - \lambda_1\varphi(\zeta) - \iint_F K(\zeta, z)\, d\lambda_2(z)$ *через* $\Omega(\zeta)$. *Если выполнены условия леммы* 4 *и* 5, *то*

$$\max_{f \in S} |g_0(f)| = \min_{\lambda_1, \lambda_2, \varphi} \left\{ \int_\Gamma \rho(\zeta)\, |\Omega(\zeta)|\, d\zeta + \operatorname{Re} e^{i\beta} \left[\int_\Gamma a(\zeta)\, \Omega(\zeta)\, d\zeta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \iint_F b(z)\, d\lambda_2(z) \right] + \iint_F \varepsilon(z)\, d\,|\lambda_2(z)| \right\}, \tag{4}$$

где min *берется по всевозможным* $\lambda_1 \geqslant 0$, *комплексным мерам* $\lambda_2(z)$ *на множестве* F *и* $\varphi(z) \in E_1$. *Минимум в* (4) *достигается при некоторых экстремальных* λ_1^*, $\lambda_2^*(z)$ *и* $\varphi^*(z)$.

Теорема 5. *Для того, чтобы функция* $f^*(z) \in S$ *была экстремальной в левой части* (4), *а* λ_1^*, λ_2^*, φ^* *были экстремальными в правой части* (4), *необходимо и достаточно выполнения равенств*

1) $e^{i\beta}\,[f^*(\zeta) - a(\zeta)]\, \Omega^*(\zeta)\, d\zeta = \rho(\zeta)\, |\Omega^*(\zeta)|\, |d\zeta|$ *п. в. на* Γ,

2) $e^{i\beta}\,[f^*(z) - b(z)]\, d\lambda_2^*(z) = \varepsilon(z)\, d\,|\lambda_2^*(z)|$ *п. в. по мере* $\lambda_2^*(z)$ *на* F.

Здесь $\Omega^*(\zeta) = K_0(\zeta, z_0) - \lambda_1^* \varphi^*(\zeta) - \iint_F K(\zeta, z)\, d\lambda_2^*(z)$, *а* β — *одно и то же в* 1) *и* 2) *действительное число.*

Теорема 6. *Пусть* Γ_i — *аналитические кривые,* $i = 1, 2, \cdots, n$, $a(\zeta)$ — *значения аналитической на* Γ *функции* $a(z)$ *и* $\ln \rho(s)$ — *аналитическая функция дуги* s *на* Γ. *Тогда экстремальная функция* $f^*(z)$ *аналитически продолжается через границу* Γ *области* G.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия лемм* 4 *и* 5 *и* $\int\limits_{\Gamma} a(\zeta) K_0(\zeta, z_0)\, d\zeta = 0$. *Тогда, если* $f_1^*(z)$ *и* $f_2^*(z)$ — *экстремальные функции в левой части* (4), *то* $f_2^*(\zeta) - a(\zeta) = e^{i\gamma}[f_1^*(\zeta) - a(\zeta)]$ *п. в. на* Γ, *где* $0 < \gamma \leqslant 2\pi$. *Если* $a(\zeta)$ *не являются граничными значениями аналитической ограниченной функции в* G, *то экстремальная функция* $f^*(z)$ *единственна.*

В заключение выражаю глубокую благодарность С. Я. Хавинсону за помощь при написании этой заметки.

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Ա. Ն. ԿՈՉԵՏԿՈՎ

Ոչ սիմետրիկ լրացուցիչ պայմաններով էքստրեմալ խնդիրներ

Հոդվածում դիտարկվում են էքստրեմալ խնդիրներ $\max \left| \sum\limits_0^r c_i f^{(i)}(z_i) \right|$ *մեծության նկատմամբ* G *տիրույթում սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների դասում, որոնք այդ տիրույթի եզրում բավարարում են* $|f(\zeta) - a(\zeta)| \leqslant \rho(\zeta)$ *անհավասարությանը, իսկ տիրույթի ներսում գտնվող որոշ* F *բազմության վրա՝* $\left| \sum\limits_0^m \gamma_i f^{(i)}(z) - b(z) \right| \leqslant \varepsilon(z)$ *անհավասարությանը, որտեղ* c_i, γ_i *և* $a(\zeta)$, $\rho(\zeta)$, $b(z)$, $\varepsilon(z)$ *տրված են: Երկակիության տեսության շնորհիվ դուրս է բերվում էքստրեմալ ֆունկցիայի բնութագրող հատկանիշը և որոշ պայմանների դեպքում ապացուցված է նրա միակությունը:*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Я. Хавинсон*. Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области. УМН т. XVIII, вып. 2 (110), 1963. [2] *K. Fan*. Existence theorems and extreme solutions for inequalities conserning convex functions or linear transformations. Zeitschr. Bd. 68, S. 205, 1957.