ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLI 1965 2

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян и Э. О. Назарян

О полной радиальной вариации одного класса гармонических функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 11/III 1965)

Как известно ([1]), измеримое по Борелю множество E имеет положительную α-емкость $(0<\alpha<1)$, если найдется такая мера μ, сосредоточенная на E, $\mu(E)=1$, для которой функция

$$U_\alpha(r,\vartheta)=\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(t)}{|e^{it}-re^{i\vartheta}|^\alpha}$$

остается равномерно ограниченной по ϑ при $r\to 1$.

Гармоническая в единичном круге функция $f(r,\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)r^n$, говорят, принадлежит классу S_α, если $\sum_1^\infty(a_n^2+b_n^2)n^\alpha<\infty$.

Интеграл

$$F(r,\vartheta)=\int_0^r\left|\frac{\partial f(r,\vartheta)}{\partial r}\right|dr$$

назовем полной вариацией на сегменте $[0, r]$, а интеграл

$$F(1,\vartheta)=F(\vartheta)=\int_0^1\left|\frac{\partial f(r,\vartheta)}{\partial r}\right|dr$$

полной радиальной вариацией функции $f(r,\vartheta)$.

В 1947 г. А. Броманом ([1]) доказана следующая теорема.

Теорема. *Если гармоническая в единичном круге функция принадлежит классу S_α, то ее полная радиальная вариация ограничена всюду, кроме, быть может, множества E, $(1-\alpha)$ емкость которого равна нулю.*

В настоящей работе этот результат обобщается в терминах выпуклой емкости для более широкого, чем S_α класса S_α.

1. *Класс S_n и оценка выпуклой емкости.* Последовательность $\{a_n\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ назовем выпуклой, если, полагая

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1},$$

имеем

$$\Delta^2 a_n \geq 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Следуя Темко [2], введем понятие выпуклой емкости множества. Для этого рассмотрим последовательность $\{\lambda_n\}$, обладающую двумя свойствами:

1) $\lambda_n \to 0$,

2) $\{\lambda_n\}$ выпукла.

Известно [3], что в этом случае функция

$$Q(r, x) = \lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n r^n \cos nx$$

удовлетворяет условию $Q(r, x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq 2\pi$ и $0 < r < 1$.

Определение 1. Измеримое по Борелю множество $E \subset [0, 2\pi]$ имеет положительную выпуклую емкость относительно последовательности $\{\lambda_n\}$, если существует мера μ, сосредоточенная на E, для которой функция

$$V(x, r) = \int_0^{2\pi} Q(r, x - t)\, d\mu(t)$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1$.

В случае отсутствия такой меры μ, считаем выпуклую емкость относительно $\{\lambda_n\}$ равной нулю.

Выпуклой емкостью E относительно $\{\lambda_n\}$ назовем число

$$C(E, \lambda_n) = e^{-V_E}, \text{ где } V_E = \inf_\mu \{ \lim_{r \to 1} \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} V(x, r) \}.$$

Определение 2. Условимся говорить, что непрерывная на $0 < t \leq 1$ функция $H(t) > 0$ принадлежит классу C_κ, если $H(0) = \infty$,

$$tH(t) \downarrow 0 \text{ при } t \to 0, \quad \int_0^1 \frac{dt}{tH(t)} < \infty, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(t)\, dt = c,$$

где $c \neq 0, \infty$ и $H(xy) \leq H(x) H(y)$.

Теперь мы с помощью класса функций C_κ можем определить тот класс функций S_κ, для которого возможно обобщить результат Бромана.

Определение 3. Гармоническая в единичном круге функция

$$f(r, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

принадлежит классу S_κ, если

$$\sum_{1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\, H\left(\frac{1}{n}\right) < \infty,$$

где $H(t)$ принадлежит классу C_*.

В качестве $\{\lambda_n\}$ рассмотрим следующую последовательность

$$\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}.$$

Заметим, что так как

$$\Delta\lambda_n = \frac{1}{nH\left(\frac{1}{n}\right)},$$

то $n\Delta\lambda_n \downarrow 0$ и $\Delta^2\lambda_n > 0$.

Лемма 1. *Пусть*

$$V_E = \sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} V(x, r)$$

и

$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} \cos n\nu\, d\mu(\nu), \qquad \beta_n = \int_0^{2\pi} \sin n\nu\, d\mu(\nu),$$

тогда

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{H\left(\frac{1}{n}\right)} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) < V_E.$$

Теперь приведем теорему об оценке выпуклой емкости.

Теорема 1. *Пусть вещественная функция $f(\nu)$ принадлежит классу S_H и пусть на множестве E $f(\nu) \geq \rho > 0$. Тогда для выпуклой емкости относительно $\{\lambda_n\}$ имеет место следующая оценка*

$$C(E, \lambda_n) < e^{-M\rho^2},$$

где M зависит от функции $H(t)$.

Доказательство. Пользуясь свойством интеграла Пуассона, можем выбрать r настолько близко к единице, чтобы выполнялось следующее неравенство

$$\int_0^{2\pi} f(r, \nu)\, d\mu(\nu) > \rho - \varepsilon. \tag{1}$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} f(r, \nu)\, d\mu(\nu) = \int_0^{2\pi} \sum_{0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\nu + b_n \sin n\nu)\, d\mu(\nu) =$$

$$= \sum_{0}^{\infty} r^n (a_n\alpha_n + b_n\beta_n),$$

то, применяя неравенство Шварца, получаем

$$\left\{\sum_1^\infty r^n(a_n\alpha_n + b_n\beta_n)\right\}^2 < \sum_1^\infty H\left(\frac{1}{n}\right) r^{2n}(a_n^2+b_n^2)\sum_1^\infty \frac{1}{H\left(\frac{1}{n}\right)}(\alpha_n^2+\beta_n^2) <$$

$$< M_1\sum_1^\infty \frac{1}{H\left(\frac{1}{n}\right)}(\alpha_n^2+\beta_n^2).$$

Пользуясь леммой 1 и неравенством (1), имеем

$$(\rho-\alpha)^2 < M_1 V_E.$$

Откуда следует оценка теоремы

$$C(E, \lambda_n) = e^{-V_E} < e^{-M\rho^2}.$$

2°. *О полной радиальной вариации функции класса* S_n. Введем следующие обозначения

$$h(x) = \int_0^x H(u)\,du, \text{ где } H(u) \in C_n,$$

$$S_n(f) = \sum_1^\infty H\left(\frac{1}{n}\right)(a_n^2+b_n^2),$$

$$D_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 h\left(\log\frac{1}{r}\right) r\,d\varphi\,dr \qquad \text{и}$$

$$E_n(f) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\varphi}\right)^2 h\left(\log\frac{1}{r}\right)\log^2\frac{1}{r}\cdot r\,d\varphi\,dr.$$

Докажем сперва следующую лемму.

Лемма 2. *Если гармоническая в единичном круге функция* $f(r, \varphi)$ *принадлежит классу* S_n, *то*

$$D_n(f) < M' S_n(f), \tag{2}$$

$$E_n(f) < M'' S_n(f), \tag{3}$$

где M' *и* M'' *зависят от функции* $H(t)$.

Доказательство. Простые вычисления дают

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 d\varphi = \pi\sum_1^\infty n^2 r^{2n-2}(a_n^2+b_n^2),$$

$$D_n(f) = \sum_1^\infty (a_n^2+b_n^2)\int_0^1 n^2 r^{2n-1} h\left(\log\frac{1}{r}\right) dr.$$

Обозначая $\log\frac{1}{r} = \frac{t}{n}$, оценим интеграл, входящий в (4).

$$\int_0^1 n^2 r^{2n-1} h\left(\log\frac{1}{r}\right) dr = n\int_0^\infty h\left(\frac{t}{n}\right) e^{-2t}\, dt <$$

$$< M_1 n h\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^\infty h(t) e^{-2t}\, dt = M_2 n h\left(\frac{1}{n}\right) = M' H\left(\frac{1}{n}\right).$$

Подставляя эту оценку в (4), получаем неравенство (2). Точно такими же рассуждениями получается неравенство (3).

С помощью леммы 2 докажем теорему о радиальной вариации функции класса S_H.

Теорема 2. *Если гармоническая в единичном круге функция $f(r, \nu)$ принадлежит классу S_H, то ее полная радиальная вариация суммируема, принадлежит классу S_H и*

$$S_H(F) \leq M S_H(f), \tag{5}$$

где M зависит от функции $H(t)$.

Доказательство. Заметив, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2,$$

получим

$$D_H(F) = D_H(f). \tag{6}$$

Докажем теперь, что следующее равенство имеет место в единичном круге почти всюду

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \nu}\right)^2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \nu}\right)^2. \tag{7}$$

Прежде всего заметим, что f_r' и rf_r' имеют нули в одинаковых точках, а последняя гармонична. Если в точке (r, ν) $rf_r' \neq 0$, то в окрестности этой точки функция rf_r' имеет постоянный знак, следовательно,

$$F_{r,\nu}'' = \frac{\partial}{\partial \nu}|f_r'| = \pm f_{r,\nu}''$$

в любой точке, где $f_r' \neq 0$. И так как условие $rf_r' = 0$ выполняется самое большее на множестве меры нуль, то этим и доказывается равенство (7), откуда следует, что

$$E_H(F) = E_H(f). \tag{8}$$

Суммируемость функции $F(\nu)$ можно доказать следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} F(\nu)\, d\nu = \int_0^1\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| d\nu\, dr = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 = P + Q.$$

Сходимость интеграла P очевидна. Пользуясь неравенством Шварца, получим

$$Q^2 < \int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 h\left(\log\frac{1}{r}\right) r\,d\nu\,dr \cdot \int\limits_{1/2}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{d\nu\,dr}{h\left(\log\frac{1}{r}\right)\cdot r} <$$

$$< 2\pi^2 D_n(f)\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dr}{rh\left(\log\frac{1}{r}\right)} = 2\pi^2 D_n(f)\int\limits_{0}^{\log 2}\frac{dr}{h(r)} < MD_n(f),$$

т. е. интеграл Q также сходящийся.

Если напишем, что

$$F(r, \nu) \sim \frac{1}{2} A\ \ (r) + \sum_{1}^{\infty} A_n(r)\cos n\nu + B_n(r)\sin n\nu,$$

то коэффициенты Фурье полностью определены для случая $r = 1$.

Пусть

$$\frac{\partial F}{\partial r} \sim \frac{1}{2}A_0' + \sum_{1}^{\infty} A_n'\cos n\nu + B_n'\sin n\nu,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\nu} \sim \sum_{1}^{\infty} nB_n'\cos n\nu - nA_n'\sin n\nu.$$

Из равенства Парсеваля получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 d\nu = \frac{1}{2}A_0'^2 + \sum_{1}^{\infty}(A_n'^2 + B_n'^2),$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\nu}\right)^2 d\nu = \sum_{1}^{\infty}(n^2 A_n'^2 + n^2 B_n'^2).$$

Теперь, пользуясь равенствами (6), (8) и леммой 2, найдем, что

$$\int\limits_{0}^{1}\left|\frac{1}{2}A_0'^2 + \sum_{1}^{\infty}(A_n'^2 + B_n'^2)\left(1 + n^2\log\frac{1}{r}\right)\right| h\left(\log\frac{1}{r}\right) r\,dr =$$

$$= D_n(F) + E_n(F) = D_n(f) + E_n(f) \leqslant MS_n(f). \tag{9}$$

Так как $A_n(0) = 0$ для любого n, то

$$A_n(1) = \int\limits_{0}^{1} A_n'(r)\,dr,$$

и снова применяя неравенство Шварца, имеем

$$A_n^2(1) \leqslant \left\{\int\limits_{0}^{1}|A_n'(r)|\,dr\right\}^2 < \int\limits_{0}^{1} A_n'^2\left(1 + n^2\log^2\frac{1}{r}\right) h\left(\log\frac{1}{r}\right) r\,dr\,\times$$

$$\times \int_0^1 \frac{dr}{\left(1+n^2\log^2\frac{1}{r}\right)h\left(\log\frac{1}{r}\right)r}. \qquad (10)$$

Заменяя в последнем интеграле $\log\frac{1}{r}=\frac{t}{n}$, получим

$$\int_0^1 \frac{dr}{\left(1+n^2\log^2\frac{1}{r}\right)h\left(\log\frac{1}{r}\right)r}=\int_0^\infty \frac{dt}{\frac{n}{t}\,h\left(\frac{t}{n}\right)(1+t^2)\,t}<$$

$$<M_1\int_0^\infty \frac{dt}{H\left(\frac{t}{n}\right)(1+t^2)\,t}. \qquad (11)$$

Так как $H(xy)\leqslant H(x)\,H(y)$, то, положив $x=\frac{t}{n}$, $y=\frac{1}{t}$, легко усмотреть, что $H\left(\frac{t}{n}\right)>\frac{H\left(\frac{1}{n}\right)}{H\left(\frac{1}{t}\right)}$, позволяющее неравенство (11) написать в следующем виде:

$$\int_0^1 \frac{dr}{\left(1+n^2\log^2\frac{1}{r}\right)h\left(\log\frac{1}{r}\right)r}<\frac{M}{H\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Подставляя это неравенство в (10), получим

$$H\left(\frac{1}{n}\right)A_n^2(1)<M\int_0^1 A_n^2\left(1+n^2\log^2\frac{1}{r}\right)h\left(\log\frac{1}{r}\right)r\,dr. \qquad (12)$$

Аналогично получится, что

$$H\left(\frac{1}{n}\right)B_n^2(1)<M\int_0^1 B_n^2\left(1+n^2\log^2\frac{1}{r}\right)h\left(\log\frac{1}{r}\right)r\,dr. \qquad (13)$$

Просуммировав неравенства (12) и (13) по n, получим

$$\sum_1^\infty H\left(\frac{1}{n}\right)\left(A_n^2(1)+B_n^2(1)\right)=S_n(F)<MS_n(f).$$

Теорема полностью доказана.

Соединяя теоремы 1 и 2, приходим к следующей теореме, которая и является обобщением теоремы Бромана.

Теорема 3. *Если гармоническая в единичном круге функция принадлежит классу S_n, то ее полная радиальная вариация ограничена всюду, кроме, быть может, множества E, у которого выпуклая емкость относительно $\{\lambda_n\}$ $\left(\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}\right)$ равна нулю.*

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР
Ереванский государственный университет

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ և Ի. Հ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

Հարմոնիկ ֆունկցիաների մի դասի շառավղային լրիվ վարիացիայի մասին

Միավոր շրջանում հարմոնիկ

$$f(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi)$$

ֆունկցիան կասենք, որ պատկանում է S_n դասին, եթե

$$\sum_{1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) H\left(\frac{1}{n}\right) < \infty,$$

որտեղ $H(t)$ ֆունկցիան մոնոտոն աճող է, երբ $t \to 0$ և բավարարում է որոշակի պայմանների:

$$F(\varphi) = \int_0^1 \left| \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} \right| dr$$

ինտեգրալը անվանում են $f(r, \varphi)$ ֆունկցիայի շառավղային լրիվ վարիացիա: Ապացուցված է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ. Եթե միավոր շրջանում հարմոնիկ ֆունկցիան պատկանում է S_n դասին, ապա նրա շառավղային լրիվ վարիացիան սահմանափակ է ամենուրեք, բացի գուցե կետերի մի այնպիսի բազմության, որի ուռուցիկ ունակությունը 0 է $\lambda_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH\left(\frac{1}{k}\right)}$ հաջորդականության նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *A. Broman*. On two classes of trigonometrical series, Uppsala, 1947. [2] *К. Темко*. Выпуклая емкость и ряды Фурье, ДАН СССР, т. 110, № 6 (1956), 943—944. [3] *Н. Бари*. Тригонометрические ряды, М., 1961.