ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLI 1965 1

МЕХАНИКА

Л. А. Мовсисян

Колебания балки с периодически изменяющейся длиной

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 17/II 1965)

1. Рассматривается балка с постоянной жесткостью на изгиб, которая приводится в движение вследствие начального отклонения и начальной скорости, сообщаемых ей в момент $t=0$. Принимается, что одна из опор балки совершает гармонические колебания в продольном направлении, а другая—неподвижна.

Исследуется движение части балки, находящейся между опорами, в предположение, что амплитуда продольно движущейся опоры мала по сравнению с первоначальной длиной балки.

Уравнение движения элемента балки и начальные условия следующие ([1])

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\gamma F}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0, \tag{1.1}$$

$$w(x, 0)=f(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t}=\varphi(x), \tag{1.2}$$

где обозначения общепринятые.

Вместо обычных краевых условий будем иметь*

$$w=0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \ \text{ при } \ x=A\sin\alpha t \ \text{ и } \ x=l, \tag{1.3}$$

где A—амплитуда, α—частота колебаний продольно движущейся опоры.

Преобразуем уравнения (1.1)—(1.3), введя безразмерные координаты

$$y=\frac{x}{l}, \quad \tau=\frac{a}{l}t. \tag{1.4}$$

Уравнение движения при этом примет вид

$$\lambda^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}=0, \tag{1.5}$$

* Для определенности здесь рассмотрен случай шарнирного опирания краев, другие случаи получаются совершенно аналогично.

где $\lambda = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{J}{F}}$ — обратная величина гибкости балки.

Перейдем к новым переменным

$$z = \frac{y-1}{\mu \sin \beta\tau - 1}, \quad \theta = \tau, \tag{1.6}$$

где

$$\mu = \frac{A}{l}, \qquad \beta = \frac{al}{a}, \qquad a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$$

Согласно вышепринятому предположению $\mu \ll 1$.

Учитывая (1. 4) и (1.6), вместо (1.2), (1.3) и (1.5) будем иметь

$$w(z, 0) = f(z), \qquad \frac{\partial w(z, 0)}{\partial \theta} = \frac{l}{a}\varphi(z) - \mu\beta z \frac{\partial w(z, 0)}{\partial z} \tag{1.7}$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1. \tag{1.8}$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + (\mu \sin\theta - 1)^4 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu^2\beta^2 z^2 \cos^2\beta\theta (\mu \sin\beta\theta - 1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} -$$

$$-2(\mu \sin\beta\tau - 1)^3 \mu\beta z \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial\theta} + \mu\beta^2 z (2\mu \cos^2\beta\theta -$$

$$- \sin\beta\theta + \mu \sin^2\beta\theta)(\mu \sin\beta\theta - 1)^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1.9}$$

2. Уравнение (1.9) с условиями (1.7) и (1.8) решается пользуясь предположением относительно малости μ.

Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра μ

$$w(z, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i \, w_i(z, \theta). \tag{2.1}$$

Произведя обычные процедуры, вместо (1.9) будем иметь

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = 4 \sin\beta\theta \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} - 2\beta z \cos\beta\theta \frac{\partial^2 w_0}{\partial z \partial \theta} + \beta^2 z \sin\beta\theta \frac{\partial w_0}{\partial z}. \tag{2.2}$$

. . . .

Краевые и начальные условия для системы (2.2) будут

$$w_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} = 0 \, (i = 0, 1, 2, \cdots) \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1, \tag{2.3}$$

$$w_0(z, 0) = f(z), \; \frac{\partial w_0(z, 0)}{\partial \theta} = \frac{l}{a}\varphi(z),$$

$$w_i(z, 0) = 0, \quad \frac{\partial w_i(z, 0)}{\partial \theta} = -\beta z \frac{\partial w_{i-1}(z, 0)}{\partial z} \quad (i = 1, 2, \cdots). \tag{2.4}$$

Систему (2.2) с условиями (2.3) и (2.4) можно решать последовательно.

Для нулевого приближения имеем

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} = 0, \tag{2.5}$$

$$w_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1, \tag{2.6}$$

$$w_0(z, 0) = f(z), \quad \frac{\partial w_0(z, 0)}{\partial \theta} = \frac{l}{a} \varphi(z). \tag{2.7}$$

Решение (2.5) с условиями (2.6) и (2.7) будет

$$w_0(z, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \omega_n \theta + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n \theta \right] \sin n\pi z, \tag{2.8}$$

где $\omega_n = n^2 \pi^2 \lambda$,

$$a_n = 2 \int_0^1 f(z) \sin n\pi z dz \text{ и } b_n = \frac{2l}{a} \int_0^1 \varphi(z) \sin n\pi z dz. \tag{2.9}$$

Из (2.2)—(2.4) и (2.8) для первого приближения имеем

$$\lambda^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial z^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big\{ -4\omega_n \sin \beta\theta \, (b_n \sin \omega_n \theta + a_n \omega_n \cos \omega_n \theta) \sin n\pi z -$$

$$-\beta n \pi \Big[2 (b_n \cos \omega_n \theta - a_n \omega_n \sin \omega_n \theta) \cdot \cos \beta\theta + \beta \Big(\frac{b_n}{\omega_n} \sin \bar{\omega}_n \theta +$$

$$+ a_n \cos \omega_n \theta \Big) \sin \beta\theta \Big] z \cos n\pi z \Big\} \tag{2.10}$$

$$w_1 = \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1. \tag{2.11}$$

$$w_1(z, 0) = 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial w_1(z, 0)}{\partial \theta} = -\beta\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n z \cos n\pi z.$$

Ищем решение (2.10) в виде

$$w_1(z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(\theta) \sin m\pi z, \tag{2.13}$$

которое уже удовлетворяет условиям (2.11).

Подставляя (2.13) в (2.10), для неизвестных $F_m(\theta)$ получим

$$F''_m + \omega_m^2 F_m = -\left(4\omega_m^2 + \frac{\beta^2}{2}\right)\sin\beta\theta\left(a_m\cos\omega_m\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{b_m}{\omega_m}\sin\omega_m\theta\right) + \beta\cos\beta\theta\,(b_m\cos\omega_m\theta - a_m\omega_m\sin\omega_m\theta) -$$

$$-2\beta\sum_{n(m\neq n)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mn}{m^2-n^2}\Big[-2\cos\beta\theta\,(b_n\cos\omega_n\theta - a_n\omega_n\sin\omega_n\theta) +$$

$$+\beta\sin\beta\theta\left(a_n\cos\omega_n\theta + \frac{b_n}{\omega_n}\sin\omega_n\theta\right)\Big]. \qquad (2.14)$$

Решение (2.14) будет

$$F_m(\theta) = C_m^{(1)}\sin\omega_m\theta + C_m^{(2)}\cos\omega_m\theta - M_m\cos(\beta+\omega_m)\theta +$$

$$+P_m\sin(\beta+\omega_m)\theta + N_m\cos(\beta-\omega_m)\theta + Q_m\sin(\beta-\omega_m)\theta -$$

$$-2\beta\sum_{n=1(n\neq m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mn}{m^2-n^2}\left[-M_n\cos(\beta+\omega_n)\theta + \right.$$

$$\left. + P_n\sin(\beta+\omega_n)\theta - N_n\cos(\beta-\omega_n)\theta + Q_n\sin(\beta-\omega_n)\theta\right], \qquad (2.15)$$

где $M_m - \dfrac{b_m\Omega_m^{(1)}}{4\beta\omega_m(\beta+2\omega_m)}$; $\quad P_m = \dfrac{a_m\Omega_m^{(1)}}{4\beta(\beta+2\omega_m)}$;

$$N_m = \frac{b_m\Omega_m^{(2)}}{4\beta\omega_m(-\beta+2\omega_m)}; \qquad Q_m = \frac{a_m\Omega_m^{(2)}}{4\beta(2\omega_m-\beta)};$$

$$M_n = \frac{b_n(2\omega_n+\beta)}{2\omega_n\Omega_m^{(3)}}; \qquad P_n = \frac{a_n(\beta+2\omega_n)}{2\Omega_m^{(3)}};$$

$$N_n = \frac{b_n(2\omega_n-\beta)}{2\omega_n\Omega_m^{(4)}}; \qquad Q_n = \frac{a_n(\beta_n-2\omega_n)}{2\Omega_m^{(4)}}; \qquad (2.16)$$

$$\Omega_m^{(1)} = 2\beta\omega_m + \beta^2 + 8\omega_m^2; \quad \Omega_m^{(2)} = 2\beta\omega_m - \beta^2 - 8\omega_m^2;$$

$$\Omega_m^{(3)} = \omega_m^2 - (\beta+\omega_n)^2; \quad \Omega_m^{(4)} = \omega_m^2 - (\beta-\omega_n)^2.$$

Постоянные интегрирования $C_m^{(1)}$ и $C_m^{(2)}$ найдем из условий (2.12), которые дают

$$C_m^{(2)} - M_m + N_m + 2\beta\sum_{n=1(n\neq m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mn}{m^2-n^2}(M_n+N_n) = 0;$$

$$\omega_m C_m^{(1)} + (\beta+\omega_m)P_m + (\beta-\omega_m)Q_m - 2\beta\sum_{n=1(n\neq m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mn}{m^2-n^2}\cdot$$

$$[(\beta+\omega_n)P_n + (\beta-\omega_n)Q_n] = \frac{\beta a_m}{2} + 2\beta\sum_{n=1(n\neq m)}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}mna_n}{m^2-n^2}.$$

(2.17)

Довольствуясь первым приближением, для прогиба балки будем иметь

$$w(z, \theta) \approx w_0(z, \theta) + \mu w_1(z, \theta), \tag{2.18}$$

где значения $w_0(z, \theta)$ и $w_1(z, \theta)$ нужно брать из (2.8) и (2.13).

Из выражения (2.18), которое может достаточно хорошо описывать движение балки для случая $\mu < 1$, видно, что прогиб балки при некоторых значениях β (см. (2.16) формулы $\Omega_m^{(3)}$ и $\Omega_m^{(4)}$) может неограниченно возрастать. Такое поведение балки по характеру похоже на ее поведение при параметрическом резонансе. Как видно из (2.16), значения β, при которых возникнет резонанс, следующие: $\beta = \omega_m \pm \omega_n$, или

$$\alpha = \frac{\pi^2 (m^2 \pm n^2)}{l^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma} \cdot \frac{J}{F}}\ . \tag{2.19}$$

Из (2.19) при $m = n = 1$ получается значение частоты возникновения главного параметрического резонанса ([2]).

Институт математики и
механики Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Պերիոդիկ փոփոխվող երկարության հեծանի տատանումները

Դիտարկվում է հաստատուն կոշտություն ունեցող հեծանի տատանումները, երբ նրա մի եզրն անշարժ է, իսկ մյուս եզրը կատարում է հարմոնիկ տատանումներ երկայնական ուղղությամբ։

Ենթադրելով, որ եզրի երկայնական տատանման ամպլիտուդան փոքր է հեծանի սկզբնական երկարությունից, խնդրի լուծումը ներկայացվում է շարքի տեսքով ըստ փոքր պարամետրի (2.1)։

Ստացված է ռեզոնանս առաջանալու (2.19) պայմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *А. П. Филиппов*, Колебания упругих систем, Изд. АН УССР, Киев, 1956.
2 *В. В. Болотин*, Динамическая устойчивость упругих систем, Гостехиздат, М., 1956.