ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XLI 1965 1

МАТЕМАТИКА

В. А. Явриан

О формуле следов для операторов Штурма—Лиувилля

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/II 1965)

1. В пространстве $L_2(0, \infty)$ рассмотрим операторы H_1 и H_2, задающиеся равенствами:

$$H_1 y = -y'' + q_1(x)\,y, \qquad y'(0) - hy(0) = 0,\ 0 \leqslant x < \infty$$

$$H_2 y = -y'' + q_1(x)\,y + q_2(x)y, \quad y'(0) - hy(0) = 0,\ \ 0 \leqslant x < \infty.$$

Здесь $q_1(x)$ вещественная функция, которая интегрируема на каждом конечном интервале и такая, что оператор H_1 имеет ограниченный снизу спектр, $q_2(x)$ — финитная интегрируемая функция ($q_2(x) \equiv 0$, $x > b$), а h—любое вещественное число. При $h = \infty$ граничные условия понимаются как $y(0) = 0$. Очевидно, что спектр оператора H_2 также ограничен снизу. Обозначим через $\xi(t) = \xi(t, H_1, H_2)$ функцию спектрального сдвига (см. [1]) для операторов H_1 и H_2, причем $\xi(t) \equiv 0$ левее спектров H_1 и H_2.

В этих предположениях верна

Теорема 1 *Если $q_2(x)$ имеет производную в нуле, то*

$$\int_{-\infty}^{0} \xi(\lambda)\,d\lambda + \int_{0}^{\infty}\left(\xi(\lambda) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}}\int_{0}^{\infty} q_2(x)\,dx\right)d\lambda = \frac{q_2(0)}{4}, \text{ при } h \neq \infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} \xi(\lambda)\,d\lambda + \int_{0}^{\infty}\left(\xi(\lambda) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}}\int_{0}^{\infty} q_2(x)\,dx\right)d\lambda = -\frac{q_2(0)}{4}, \text{ при } h = \infty.$$

Доказательство.

Вместе с операторами H_1 и H_2 в пространстве $L_2(0, l)$ рассмотрим также операторы $H_1^{(l)}$ и $H_2^{(l)}$, которые задаются равенствами:

$$H_1^{(l)} y = -y'' + q_1(x)\,y,\ y'(0) - hy(0) = 0,\ y'(l) - \operatorname{tg}\beta y(l) = 0,$$
$$(0 \leqslant x \leqslant l);$$

$$H_2^{(l)} y = -y'' + q_1(x)\,y + q_2(x)y,\ y'(0) - hy(0),\ y'(l) - \operatorname{tg}\beta y(l) = 0,$$
$$(0 \leqslant x \leqslant l),$$

где $\operatorname{tg}\beta$ — некоторое вещественное число. Считаем, что $H_1^{(-)} = H_1$, $H_2^{(-)} = H_2$.

В дальнейшем через S_1 и S_2 обозначаются, соответственно, банаховы пространства ядерных операторов и операторов Гильберта—Шмидта, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ нормы в S_1 и S_2, V — оператор умножения на $q_2(x)$: $Vy = q_2(x)\,y$.

Сначала покажем, что в любой общей точке регулярности z

$$(H_2^{(l)} - zI)^{-1} - (H_1^{(l)} - zI)^{-1} \in S_1,\ 0 < l < +\infty.$$

Легко видеть, что для этого достаточно, чтобы $R_{z,l}^{\frac{1}{2}} V R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \in S_1$, где $R_{z,l} = (H_1^{(l)} - zI)^{-1}$. Так как $\left\| R_{z,l}^{\frac{1}{2}} V R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \right\|_1 \leqslant \left\| V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2$, то остается показать что $V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \in S_2$. Отметим, что, вообще говоря, нельзя утверждать, что $D(V) \supseteq D(H_1)$, но $D(V^{\frac{1}{2}}) \supseteq D(H_1^{\frac{1}{2}})$ и, следовательно, сумма $H_2 = H_1 + V$ понимается в смысле форм (см. [2]).

Пусть

$$-\varphi'' + q_1(x)\varphi - \lambda\varphi = 0,\ \varphi(0, \lambda) = 1,\ \varphi'(0, \lambda) = h,\ h \neq \infty$$

$$-\varphi'' + q_1(x)\varphi - \lambda\varphi = 0,\ \varphi(0, \lambda) = 0,\ \varphi'(0, \lambda) = 1,\ h = \infty.$$

Тогда можно показать, что

$$\left\| V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \right\|_2^2 = \int_0^l q_2(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi(x, \lambda)|^2}{|\lambda - z|^2}\, d\sigma_1^{(l)}(\lambda),$$

где $\sigma_1^{(l)}$ — спектральная функция оператора $H_1^{(l)}$. Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1^{(l)}(\lambda)}{|\lambda - z|} < +\infty \quad \text{при } h \neq \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1^{(l)}(\lambda)}{|\lambda - z|^2} < +\infty \quad \text{при } h = \infty.$$

Так как $|\varphi(x, \lambda)| \leqslant \text{const}$, $0 \leqslant x \leqslant b$, $-\infty < \lambda < \infty$ при $h \neq \infty$ и $\varphi(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$ при $h = \infty$, то $V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}} \in S_2$. Более того, $\|V^{\frac{1}{2}} R_{z,l}^{\frac{1}{2}}\|_2$ ограничен при фиксированном z и при $0 < l_0 \leqslant l \leqslant \infty$. Таким образом,

$$\|R_{z,l}^{\frac{1}{2}} V R_{z,l}^{\frac{1}{2}}\|_1 \leqslant C(z),\ 0 < l_0 \leqslant l \leqslant \infty \tag{1}$$

Пусть $q_2(x) \geqslant 0$. Обозначим через $\lambda_n^{(l)}$ и $\mu_n^{(l)}$ собственные числа операторов $H_1^{(l)}$ и $H_2^{(l)}$, занумерованные в порядке возрастания (операторы

H_1 и H_2 полуограничены). $\varphi_n^{(l)}$ и $\psi_n^{(l)}$ — соответствующие собственные функции. Можно показать, что

$$\sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda} \xi_l(t)\, dt \leqslant \sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}),\ l < +\infty \qquad (2)$$

Если A и $C = A + B$ полуограниченные операторы, λ_n и μ_n — соответствующие собственные числа, занумерованные в порядке возрастания, φ_n и ψ_n — соответствующие нормированные собственные элементы, то в работе [3] доказано, что

$$\sum_{k=1}^{n} (B\psi_k, \psi_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\mu_k - \lambda_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} (B\varphi_k, \varphi_k). \qquad (3)$$

Применим это неравенство к операторам $H_1^{(l)}$ и $H_2^{(l)}$. Получим

$$\sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) \leqslant \sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} \int_0^{\infty} q_2(x)\, \varphi_{n,l}^2(x)\, dx,$$

$$\sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} (\mu_n^{(l)} - \lambda_n^{(l)}) \geqslant \sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} \int_0^{\infty} q_2(x) \psi_{n,l}^2(x)\, dx.$$

Из (2) следует

$$\sum_{\mu_n^{(l)} < \lambda} \int_0^{\infty} q_2(x)\, \varphi_{n,l}^2(x)\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda} \xi_l(t)\, dt \leqslant \sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} \int_0^{\infty} q_2(x)\, \varphi_{n,l}^2(x)\, dx. \qquad (4)$$

Имеем

$$\sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} \varphi_{n,l}^2(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi^2(x, \lambda)\, d\sigma_1^{(l)}(\lambda) = \Theta_1^{(l)}(x, x, \lambda),$$

$$\sum_{\lambda_n^{(l)} < \lambda} \psi_{n,l}^2(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \psi^2(x, \lambda)\, d\sigma_2^{(l)}(\lambda) = \Theta_2^{(l)}(x, x, \lambda).$$

Известно, что $\sigma_k^{(l)}(t) \to \sigma_k(t)$ при $l \to \infty$ $(k = 1, 2)$ во всех точках непрерывности $\sigma_k(t)$. Следовательно, почти всюду

$$\Theta_1^{(l)}(x, x, \lambda) \to \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi^2(x, t)\, d\sigma_1(t) = \Theta_1(x, x, \lambda),$$

$$\Theta_2^{(l)}(x, x, \lambda) \to \int_{-\infty}^{\lambda} \psi^2(x, t)\, d\sigma_2(t) = \Theta_2(x, x, \lambda).$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\lambda}\xi_l(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\lambda}\xi(t)\,dt. \tag{5}$$

Согласно формуле М. Г. Крейна ([1, 4]) имеем:

$$\operatorname{Sp}\left[(H_2^{(l)}-zI)^{-1}-(H_1^{(l)}-zI)^{-1}\right]=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_l(t)}{(t-z)^2}\,dt\ ,$$

где $0<l\leqslant\infty$, а z — любая общая точка регулярности для $H_1^{(l)}$ и $H_2^{(l)}$. Можно показать, что

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_l(t)}{(t-z)^2}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(t)}{(t-z)^2}\,dt\,. \tag{6}$$

Из работы ([2]) следует, что

$$\ln\det\left(I+R_{a,l}^{\frac{1}{2}}VR_{a,l}^{\frac{1}{2}}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_l(t)}{t-z}\,dt.$$

Пусть $H_1^{(l)}>(a+\varepsilon)I$ при $0<l_0\leqslant l\leqslant\infty$, $\varepsilon>0$. Тогда (см. ([3]))

$$\ln\det\left(I+R_{a,l}^{\frac{1}{2}}VR_{a,l}^{\frac{1}{2}}\right)\leqslant\left|R_{a,l}^{\frac{1}{2}}VR_{a,l}^{\frac{1}{2}}\right|_2.$$

Из этого неравенства вместе с (1) и (6) следует, что

$$\lim_{l\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_l(t)}{t-z}\,dt=\text{Const}+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi(t)}{t-z}\,dt.$$

Отсюда уже нетрудно получить (5).

Переходя к пределу в неравенстве (4), можно получить

$$\int_0^{\lambda}q_2(x)\,\Theta_2(x,x,\lambda)\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\lambda}\xi(t)\,dt\leqslant\int_0^{\lambda}q_2(x)\,\Theta_1(x,x,\lambda)\,dx. \tag{7}$$

Б. М. Левитан ([6], теорема 4.1*) установил, что равномерно по x в любом конечном интервале при $\lambda\to\infty$

$$\Theta_k(x,x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}+\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{2x}+o(1)\ \text{при}\ h\neq\infty,\ (k=1,2)$$

$$\Theta_k(x,x,\lambda)=\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}-\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{2x}+o(1)\ \text{при}\ h=\infty,\ (k=1,2).$$

Следовательно, из (7) получаем

---

* В формулировке этой теоремы содержится вычислительная неточность

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԱ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} q_2(x)\frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x}\,dx + o(1) \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}\int_0^{\infty} q_2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} q_2(x)\frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x}\,dx + o(1) \text{ при } h \neq \infty$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} q_2(x)\frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x}\,dx + o(1) \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}\int_0^{\infty} q_2(x)\,dx \leqslant -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} q_2(x)\frac{\sin 2\sqrt{\lambda}x}{x}\,dx + o(1) \text{ при } h = \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}\int_0^{\infty} q_2(x)\,dx \to \frac{q_2(0)}{4} \quad (h \neq \infty),$$

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\sqrt{\lambda}\int_0^{\infty} q_2(x)\,dx \to -\frac{q_2(0)}{4} \quad (h = \infty).$$

Эти равенства равносильны теореме 1.

Таким же образом можно поступить в случае $q_2(x) \leqslant 0$. Если $q_2(x)$ — любое, то $q_2(x) = q_2^+(x) - q_2^-(x)$, где $q_2^+(x) \geqslant 0$, $q_2^-(x) \geqslant 0$. Отсюда легко следует теорема 1 при любом $q_2(x)$. Эта теорема в случае $q_2(x) = 0$ и $h = \infty$ доказана. Л. Д. Фаддеевым (7), причем вместо финитности от $q_2(x)$ требовалось только $\int_0^{\infty} x|q_2(x)|\,dx < +\infty$.

Она без строгого вывода была указана также Р. Г. Ньютоном (8). В случае, когда полуограниченный оператор H_1 имеет дискретный спектр, эта теорема совпадает с результатом М. Г. Гасымова (3).

2. Здесь мы рассмотрим два сингулярных оператора Штурма—Лиувилля, которые задаются одним и тем же дифференциальным выражением, но разными условиями в нуле. В том случае, когда эти операторы имеют дискретный спектр, М. Г. Гасымов и Б. М. Левитан (9) получили формулу для суммы разностей собственных значений этих операторов. Здесь эта формула обобщается на любые операторы Штурма—Лиувилля (не обязательно с дискретным спектром).

Пусть операторы H_{h_1} и H_{h_2} задаются равенствами:

$$H_{h_1}y = -y'' + q(x)y,\ y'(0) - h_1 y(0) = 0,\ 0 < x < \infty,$$

$$H_{h_2}y = -y'' + q(x)y,\ y'(0) - h_2 y(0) = 0,\ 0 \leqslant x < \infty,$$

$q(x)$ — интегрируемая вещественная функция в любом конечном интервале, причем для простоты изложения мы считаем, что имеется случай точки Вейла. Случай круга Вейла совершенно аналогичен. Пусть оператор H_{h_1} полуограничен. Так как резольвенты операторов H_{h_1} и H_{h_2} отличаются на одномерный оператор, то H_{h_2} тоже полуограничен и имеет смысл $\xi(\lambda)=\xi(\lambda, H_{h_2}, H_{h_1})$, причем можно считать, что $\xi(\lambda)=0$ левее спектров H_{h_1} и H_{h_2}. Справедлива

Теорема 2. *При любой функции $q(x)$, порождающей полуограниченные операторы H_{h_1} и H_{h_2},*

$$\int_{-\infty}^{0}\xi(\lambda)\,d\lambda+\int_{0}^{\infty}\left(\xi(\lambda)-\frac{1}{\pi}(h_2-h_1)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)d\lambda=-\frac{1}{2}(h_2^2-h_1^2).$$

Наметим доказательство.

Как и прежде, рассмотрим в $L_2(0, l)$ операторы $H_{h_1}^{(l)}$ и $H_{h_2}^{(l)}$ и обозначим соответствующие собственные числа и нормированные собственные функции через $\lambda_{n,l}$, $\mu_{n,l}$, $\varphi_{n,l}^{(x)}$, $\psi_{n,l}^{(x)}$. Для определенности предположим, что $h_2>h_1$. Тогда

$$H_{h_2}^{(l)}\geqslant H_{h_1}^{(l)} \text{ и } \mu_{n,l}\geqslant\lambda_{n,l}.$$

Из неравенства (10) работы (°) и неравенства (2) следует, что

$$(h_2-h_1)\sum_{\mu_{n,l}<\lambda}\psi_{n,l}^2(0)\leqslant\sum_{\mu_{n,l}<\lambda}(\mu_{n,l}-\lambda_{n,l})\leqslant\int_{-\infty}^{\lambda}\xi_l(t)\,dt\leqslant\sum_{\lambda_{n,l}<\lambda}(\mu_{n,l}-\lambda_{n,l})\leqslant$$

$$\leqslant(h_2-h_1)\sum_{\lambda_{n,l}<\lambda}\varphi_{n,l}^2(0).$$

Отсюда

$$(h_2-h_1)\,\sigma_{h_1}^{(l)}(\lambda)\leqslant\int_{-\infty}^{\lambda}\xi_l(t)\,dt\leqslant(h_2-h_1)\,\sigma_{h_2}^{(l)}(\lambda), \tag{8}$$

где $\sigma_{h_1}^{(l)}(\lambda)$ и $\sigma_{h_2}^{(l)}(\lambda)$ — спектральные функции операторов $H_{h_1}^{(l)}$ и $H_{h_2}^{(l)}$. Пусть $A_l=(H_{h_1}^{(l)}+aI)^{-1}$ и $B_l=(H_{h_2}^{(l)}+aI)^{-1}$, где $a>0$, такое, что $H_{h_1}^{(l)}>(-a+\varepsilon)I$, $H_{h_2}^{(l)}\geqslant(-a+\varepsilon)I$. Можно доказать, что в ядерной норме

$$\lim_{l\to\infty}(B_l-A_l)(A_l-zI)^{-1}=(B-A)(A-zI)^{-1}. \tag{9}$$

Обозначим $\eta_l(t)=\xi_l(\lambda)$, где $t=\dfrac{1}{\lambda+a}$.

Известно ([1]), что при невещественных z

$$\int_0^{\infty}\frac{\eta_l(t)}{t-z}\,dt=\ln\det(I+(B_l-A_l)(A_l-zI)^{-1}).$$

Из (9) следует, что

$$\int_0^{\infty} \frac{\eta_l(t)}{t-z}\,dt \to \int_0^{\infty} \frac{\eta(t)}{t-z}\,dt.$$

Отсюда, как и в п. 1, можно получить, что

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi_l(t)\,dt \to \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t)\,dt.$$

Перейдя к пределу в (8) при $l \to \infty$, получим

$$(h_2 - h_1)\,\sigma_{h_1}(\lambda) \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t)\,dt \leqslant (h_2 - h_1)\,\sigma_{h_1}(\lambda).$$

Отсюда аналогично тому, что в работе (⁵), можно получить доказательство теоремы 2.

3. Теперь рассмотрим тот случай, когда $h_1 = h$, $h_2 = \infty$.

Имеет место

Теорема 3. *Если $q(x)$ финитная функция и имеет производную в нуле, то*

$$\int_{-\infty}^{0} \xi(\lambda, H_h, H_-)\,d\lambda + \int_0^{\infty}\left(\xi(\lambda, H_h, H_-) - \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right)d\lambda =$$

$$= \frac{q(0)}{2} + \frac{1}{2}h^2. \tag{10}$$

Доказательство.

Вместе с операторами H_h и H_- рассмотрим также операторы $H_h^{(0)}$ и $H_-^{(0)}$, которые соответствуют случаю $q(x) \equiv 0$.

Легко проверить, что

$$\xi(\lambda, H_0^{(0)}, H_0^{(-)}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \lambda > 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

Так как

$$\xi(\lambda, H_0, H_-) = \xi(\lambda, H_0, H_0^{(0)}) + \xi(\lambda, H_0^0, H_-^{(0)}) + \xi(\lambda, H_-^{(0)}, H_-),$$

то из теоремы 1 следует, что при $\lambda \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, H_0, H_-)\,dt = \frac{1}{2}\lambda - \frac{q(0)}{2} + o(1).$$

Отсюда, с помощью теоремы 2 и равенства $\xi(\lambda, H_h, H_-) = \xi(\lambda, H_0, H_-) - \xi(\lambda, H_0, H_h)$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\lambda} \xi(t, H_h, H_-)\,dt = \frac{1}{2}\lambda - \frac{q(0)}{2} - \frac{2}{\pi}h\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2}h^2 + o(1) \text{ при } \lambda \to \infty$$

Отметим, что в формуле (10) участвует $q(0)$, в то время как формула в теореме 2 от $q(x)$ не зависит.

В заключение автор выражает свою благодарность члену-корреспонденту АН УССР М. Г. Крейну за постановку задач и советы.

Ереванский государственный
университет

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ

Շտուրմ—Լիուվիլի օպերատորների համար հետքերի բանաձևի մասին

$L_2(0, \infty)$ տարածության մեջ դիտարկվում են H_1 և H_2 օպերատորները՝

$$H_1 y = -y'' + q_1(x)y, \quad y'(0) - hy(0) = 0$$

$$H_2 y = -y'' + q_1(x)y + q_2(x)y, \quad y'(0) - hy(0) = 0$$

որտեղ $q_2(x)$-ը ֆինիտ ֆունկցիա է։

Նշանակենք $\xi(\lambda)$-ով H_1 և H_2 օպերատորների սպեկտրալ տեղաշարժի ֆունկցիան (տես (¹))։ Ապացուցվում է հետևյալ

Թեորեմը

Եթե $q_2(x)$-ն ունի ածանցյալ զրո կետում, ապա՝

$$\int_{-\infty}^{0} \xi(\lambda)\, d\lambda + \int_{0}^{\infty} \left(\xi(\lambda) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_{0}^{\infty} q_2(x)\, dx \right) d\lambda = \frac{q_2(0)}{4}, \text{ եթե } h \neq \infty$$

$$\int_{-\infty}^{0} \xi(\lambda)\, d\lambda + \int_{0}^{\infty} \left(\xi(\lambda) - \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} \int_{0}^{\infty} q_2(x)\, dx \right) d\lambda = -\frac{q_2(0)}{4}, \text{ եթե } h = \infty$$

Ստացվում են նման բանաձևեր նաև այն H_1 և H_2 օպերատորների համար, որոնք տրվում են միևնույն բանաձևերով, բայց տարբեր եզրային պայմաններով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. Г. Крейн.* Матем. сборник, 33 (75), 3, (1953). [2] *В. А. Яврян.* ДАН АрмССР, т. 38, № 1 (1964). [3] *М. Г. Гасымов*, ДАН СССР, т. 150, № 6 (1963). [4] *М. Г. Крейн*, ДАН СССР, т. 144, № 2 (1962). [5] *И. Ц. Гохберг* и *М. Г. Крейн*, Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. [6] *Б. М. Левитан*, Изв. АН СССР, сер. матем., 19 (1955). [7] *Л. Д. Фаддеев*. ДАН СССР, т. 115, № 5 (1957). [8] *R. G. Newton*, Phys. Rev., vol. 101 № 5 (1956). [9] *М. Г. Гасымов* и *Б. М. Левитан*, ДАН СССР, т. 151, №5 (1956).