ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XLI 1965 1

МАТЕМАТИКА

С. Ц. Саркисян

Свойства решений систем Коши—Римана с квадратными добавками

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 25/I 1965)

При изучении плоского остановившегося течения несжимаемой вязкой жидкости получается система вида:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = aw^2 + b, \tag{1}$$

где $w = u + iv$—искомая функция,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad a = \text{const}, \quad b = \text{const}.$$

Заменой переменной систему (1) можно привести к виду:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \alpha w^2 + \beta w, \tag{2}$$

где α и β—постоянные величины.

1°. Рассмотрим систему более общего вида, чем (2). Рассматривается система вида

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = Aw^2 + Bw\bar{w} + C\bar{w}^2 + Dw + E\bar{w}, \tag{3}$$

где коэффициенты $A, B, \cdots, E$—функции переменной z, заданной в некоторой области G, и принадлежащие $L_p(G)$, $p > 2$. Будем говорить, что $w(z)$ является обобщенным решением системы (3) в окрестности точки z_0, если в некоторой окрестности G_0 этой точки w обладает обобщенными производными в смысле Соболева ([1]), которые суммируемы со степенью $p > 1$ и удовлетворяют системе (3) почти везде в G_0. Если $w(z)$ удовлетворяет системе (3) в окрестности каждой точки области G, исключая, быть может, точки некоторого дискретного относительно G множества G_w^*, то будем говорить, что $w(z)$ является обобщенным решением системы (3) в области G. Множество G_w^*, которое содержит лишь изолированные точки, вообще говоря, зависит от выбора w. Если G_w^* пустое множество, то обобщенное решение $w(z)$ будем называть регулярным решением системы (3) в области G. Но так как из суммируемости обобщенных производных следует непрерывность функции в G ([1]), то регулярное в области G решение непрерывно в G и удовлетворяет системе (3) почти везде в G. Для решений систем (3), регулярных в G, имеют место

Теорема 1. *Если A, B, C, D, E ограниченные в G функции и регулярное решение $w(z)$ системы* (3) *в точке $z_0 \in G$ имеет нуль бесконечного порядка, то $w(z) = 0$ в области.*

Теорема 2. *Пусть $z_0 \in G$ является предельной точкой для нулей регулярного решения системы* (3). *Тогда $w(z) \equiv 0$ в G.*

2°. Приведем теперь одно интегральное представление регулярных решений системы (3) в G.

Теорема 3. *Пусть $A, B, C, Д, E \in L_{p\,12}(G)$, где G некоторая область, и пусть $w = w(z)$ регулярное решение системы* (3) *в этой области G. Тогда $w(z)$ имеет вид*

$$w(z) = \frac{1}{\Psi(z) - \omega\left(A_0 e^{\omega(D_0)}\right)} \cdot e^{\omega(D_0)}, \tag{4}$$

где $\Psi(z)$ мероморфная в G функция,

$$\omega(P) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{P(t)}{t-z}\, d\sigma_t, \tag{5}$$

$$A_0(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\cdot\dfrac{\overline{w}}{w} + C(z)\dfrac{\overline{w}^2}{w}, & \text{если } w(z) \neq 0\ z \in G \\ A(z) + B(z) + C(z), & \text{если } w(z) = 0\ z \in G \end{cases}$$

$$D_0(z) = \begin{cases} D(z) + E(z)\cdot\dfrac{\overline{w}}{w}, & \text{если } w(z) \neq 0\ z \in G \\ D(z) + E(z), & \text{если } w(z) = 0\ z \in G. \end{cases}$$

Верна и обратная

Теорема. *Всякая функция вида* (4), *где $\Psi(z)$ мероморфна в G, а $\omega(P)$ имеет вид* (5), *является регулярным решением системы* (3).

В частности, если $B \equiv C \equiv E \equiv 0$, то правая часть (4) зависит только от $A(z)$ и $D(z)$.

Обобщенное решение системы (3) в области G является регулярным решением в $G - G^*_w$, где G^*_w дискретное относительно G множество. Следовательно, обобщенное решение системы (3) в области G имеет вид (4), где $\Psi(z)$ в точках G^*_w имеет любые изолированные особенности.

Если положить $D = E = 0$, то формула (4) принимает вид

$$w(z) = \frac{1}{\Psi(z) - \omega(A_0)}, \tag{6}$$

где $\Psi(z)$ аналитическая в G функция, а $\omega(A_0)$ функция вида (5), т. е. представление обобщенных решений системы вида

$$\frac{dw}{dz} = Aw^2 + Bw\bar{w} + C\bar{w}^2$$

в области G, полученное в работе ([2]).

Если положить $A \equiv B = C = 0$, то формула (4) принимает вид

$$w(z) = \varphi(z) \cdot e^{\omega(D_0)}, \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ аналитическая в G функция, а $\omega(D_0)$ функция вида (5). Формула (7) является интегральным представлением первого рода обобщенных аналитических функций, приведенных в работе ([3]).

3. Здесь мы приведем некоторые свойства решений систем (3).

Определение. Точка z расширенной плоскости $z = x + iy$, в окрестности $0 < |z - z_0| < r$ которой обобщенное решение системы (3) $w(z)$ непрерывно, называется устранимой особой точкой, если $\lim\limits_{z \to z_0} w(z)$ существует и конечен, полюсом, если $\lim\limits_{z \to z_0} w(z)$ существует и равен бесконечности, существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z \to z_0} w(z)$ не существует.

Теорема 4. (Аналог теоремы Сохоцкого).

Если z_0—существенно особая точка обобщенного решения $w(z)$ системы (3) в G, то для любого комплексного числа A существует последовательность точек $z_k \to z_0$ такая, что $\lim\limits_{z_k \to z_0} w(z) = A$.

Теорема 5. (Аналог теоремы Лиувилля).

Если $w(z)$ регулярное в открытой плоскости E решение системы (3) и $\left|\frac{1}{w}\right|$ ограничена на всей (открытой) плоскости, то $w(z)$ имеет вид

$$w(z) = \frac{1}{C - \omega(A_0 e^{\omega(D_0)})} \cdot e^{\omega(D_0)}, \tag{8}$$

где $C = \text{const}$, $\omega(P)$ функция вида (5).

Функции вида (8) можно назвать обобщенными постоянными.

Теорема 5. *Пусть $w(z)$ регулярное, не равное тождественно нулю решение системы (3) в области G. Пусть $w(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in G$, тогда в окрестности этой точки*

$$w(z) = (z - z_0)^n \cdot \bar{w}(z), \tag{9}$$

где n—некоторое целое положительное число, а $\bar{w}(z)$ непрерывна в некоторой окрестности точки z_0, где она не обращается в нуль. Число n в (9) будем называть кратностью нуля z_0.

Теорема 6. (Аналог принципа аргумента).

Пусть $w(z)$—регулярное решение системы (3) в области G, которая удовлетворяет следующим условиям: 1) $w(z)$—непрерывна в $G + \Gamma$, где Γ граница области G и 2) $w(z) \neq 0$ всюду на Γ. В та-

ком случае число нулей внутри области G определяется по формуле

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg w(z), \tag{10}$$

причем каждый нуль считается столько раз, какова его кратность.

В частности, если $B = C = E = 0$, A, D — голоморфные в G функции, то (4) принимает вид

$$w(z) = \frac{1}{\Psi(z) - A(z)\, e^{D(z)\cdot\bar z}} \cdot e^{D(z)\cdot\bar z},$$

где $\Psi(z)$ — аналитическая функция в G.

Ереванский политехнический институт

Ս. Ց. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Քառակուսային աջ մասերով Կոշի-Ռիմանի սիստեմի լուծումների հատկությունները

Դիտարկվում են հետևյալ տիպի սիստեմները

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = Aw^2 + Bw\bar w + C\bar w^2 + Dw + E\bar w$$

$A, B, C, D, E \in L_p(G)$, $p > 2$ *գտնված են մի շարք կլասիկ թեորեմների (Սոխոցկու-Լիուվիլի, արգումենտի սկզբունքի և այլն) ընդհանրացումները և անալոգները այդ սիստեմների լուծումների համար։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Л. Соболев*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике. ЛГУ, Физматгиз 1950. [2] *С. Ц. Саркисян*, ДАН Арм ССР, т 34, № 3, стр. 141—146 (1962). [3] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М., 1950