Известия НАН Армении, Физика, т.60, №3, с.303–313 (2025)

УДК 539.1
DOI: 10.54503/0002-3035-2025-60.3-303

НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2 В КОМБИНИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

А.В. ИВАШКЕВИЧ[1], В.М. РЕДЬКОВ[1],
М.К. МАРГАРЯН[2], А.М. ИШХАНЯН[2*]

[1]Институт физики имени Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск, 220072 Беларусь
[2]Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

[*]e-mail: aishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 8 августа 2025 г.)

В работе исследуется нерелятивистское приближение в рамках 39-компонентной теории первого порядка для частицы со спином 3/2 в искривлённом пространстве-времени во внешних электромагнитных полях. Исходя из общековариантных матричных уравнений, обобщённых с помощью тетрадного метода Вейля–Фока–Иваненко, применяются явные формы четырёх основных матриц Γ^a размерности 16×16 в соответствующей системе первого порядка. Анализ проводится для метрик пространства-времени, допускающих существование нерелятивистских уравнений.

Для разделения больших и малых компонент полной волновой функции из минимального многочлена четвёртой степени матрицы $\Gamma^0_{16\times16}$ строятся три проективных оператора. Получены явные формы этих компонент и выделен набор независимых переменных; в частности, среди больших компонент независимыми оказываются только четыре.

Следуя стандартной процедуре, выведена нерелятивистская система уравнений для четырёхкомпонентной волновой функции. Полученный гамильтониан содержит члены от электромагнитного поля, а также дополнительные геометрические вклады, выраженные через коэффициенты вращения Риччи, скаляр Риччи R и тензор Риччи R_{ab}. Отдельно выделен член, описывающий взаимодействие магнитного момента частицы со спином 3/2 с внешним магнитным полем, выраженный через спиновые матрицы S_i и компоненты вектора магнитного поля $\mathbf{B}$.

1. Введение

После фундаментальных исследований Паули–Фирца [1,2] и Рариты–Швингера [3] теория частиц со спином 3/2 получила широкое развитие [4–14]. В более поздних работах [15–17] для частицы со спином 3/2 во внешних магнитных и кулоновских полях были получены точные решения и определены соответствующие энергетические спектры. Эти результаты были получены из систем 16 уравнений в полярных и радиальных координатах, полученных методом разделения переменных. Однако, насколько нам известно, явный вид соответствующих нерелятивистских гамильтонианов ранее не был представлен.

В настоящей работе эта задача решается путём получения уравнения типа Паули для частицы со спином 3/2 в присутствии произвольных электромагнитных полей и общей метрики пространства-времени, допускающей квантово-механическое нерелятивистское описание. Мы определяем явную форму соответствующего гамильтониана и проверяем корректность и практическую применимость результата на частном примере — для частицы со спином 3/2 во внешнем однородном магнитном поле. В этом случае полученный результат совпадает с ранее известными [15,16].

В принципе, общий вид нерелятивистского гамильтониана может быть явно установлен для произвольных внешних электромагнитных полей и метрик подходящей структуры. Аналогичный подход может быть также распространён на частицы со спином 2. В этом случае анализ становится более сложным, поскольку необходимо исходить из системы 39 уравнений первого порядка, сформулированной Фёдоровым [18] и Редже [19]. Тем не менее, общая логика вывода остаётся той же, что и для случая со спином 3/2.

Интерес к нерелятивистскому описанию частиц высокого спина продиктован как теоретическими, так и практическими соображениями, поскольку частицы со спином 3/2 и 2 экспериментально наблюдаются в виде резонансов.

2. Основное уравнение

Общековариантное уравнение для частицы со спином 3/2 [1–4] имеет вид

$$\gamma^5 \epsilon_\rho^{\ \sigma\alpha\beta}(x)\gamma_\sigma\left(iD_\alpha - \frac{1}{2}M\gamma_\alpha\right)\Psi_\beta = 0, \quad D_\alpha = \nabla_\alpha + \Gamma_\alpha + ieA_\alpha, \tag{1}$$

и может быть эквивалентно записано в локальной тетрадной форме:

$$\gamma^5 (\mu^{[ca]})_k^{\ n}\gamma_c\left[i(D_a)_n^{\ l} - M\gamma_a\delta_n^{\ l}\right]\Psi_l = 0, \quad \epsilon_k^{\ can} = (\mu^{[ca]})_k^{\ n}, \tag{2}$$

где обобщённые ковариантные производные определяются как

$$D_a = e^\alpha_{(a)}\left(\partial_\alpha + ieA_\alpha\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma^{ps}\otimes I + I\otimes j^{ps}\right)\gamma_{[ps]a} = e^\alpha_{(a)}\left(\partial_\alpha + ieA_\alpha\right) + \Sigma_a. \tag{3}$$

3. Большие и малые нерелятивистские компоненты

Волновая функция может быть представлена в виде матрицы, где первый индекс A соответствует биспинорной компоненте, а второй индекс (n) — 4-векторной компоненте:

$$\Psi_{A(n)} = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Полную систему Ψ удобно рассматривать как 16-мерный столбец.

Основное уравнение целесообразно записать в матричной форме:

$$\left(Y_0 D_0 + Y^1 D_1 + Y^2 D_2 + Y^3 D_3 + iM\right)\Psi = 0. \tag{5}$$

В нерелятивистском пределе большие и малые компоненты определяются при помощи проективных операторов, построенных из матрицы Y^0. Эта матрица удовлетворяет минимальному многочлену четвёртой степени:

$$Y_0^2\left(Y_0^2 - I_{16}\right) = 0. \tag{6}$$

Соответственно, существуют три проективных оператора (ниже приведены их явные формы),

$$P_0 = I_{16} - Y_0^2, \quad P_1 = P_+ = +\frac{1}{2}Y_0^2\left(Y + I_{16}\right), \quad P_2 = P_- = -\frac{1}{2}Y_0^2\left(Y - I_{16}\right), \tag{7}$$

которые обладают стандартными свойствами ортогональности и полноты.

$$P_0 + P_+ + P_- = I_{16}, \quad P_0^2 = P_0, \quad P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2. \tag{8}$$

Таким образом, получаются три проективные компоненты, каждая из которых содержит определённое число независимых переменных.

$$\Psi_0 = P_0\Psi\ , \quad \Psi_+ = \Psi_1 = P_1\Psi, \quad \Psi_- = \Psi_2 = P_2\Psi, \tag{9}$$

$$\Psi_0 = \left|\begin{matrix} f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ d_0 \\ \left(f_1 + if_2 - g_3\right)/3 \\ \left(f_3 + g_1 - ig_2\right)/3 \\ \left(-d_3 + h_1 + ih_2\right)/3 \\ \left(d_1 - id_2 + h_3\right)/3 \\ \left(-if_1 + f_2 + ig_3\right)/3 \\ i\left(f_3 + g_1 - ig_2\right)/3 \\ \left(i\left(d_3 - h_1\right) + h_2\right)/3 \\ i\left(d_1 - id_2 + h_3\right)/3 \\ \left(f_3 + g_1 - ig_2\right)/3 \\ \left(-f_1 - if_2 + g_3\right)/3 \\ \left(d_1 - id_2 + h_3\right)/3 \\ \left(d_3 - h_1 - ih_2\right)/3 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ -iS_5 \\ iS_6 \\ -iS_7 \\ iS_8 \\ S_6 \\ -S_5 \\ S_8 \\ -S_7 \end{matrix}\right| \tag{10}$$

$$\Psi_{-}=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\-d_3+2f_1-if_2+g_3-2h_1+ih_2\\-2d_1-id_2-f_3+2g_1+ig_2+h_3\\d_3-2f_1+if_2-g_3+2h_1-ih_2\\2d_1+id_2+f_3-2g_1-ig_2-h_3\\i\left(d_3+f_1-2if_2-g_3-h_1+2ih_2\right)\\i\left(d_1+2id_2-f_3-g_1-2ig_2+h_3\right)\\-i\left(d_3+f_1-2if_2-g_3-h_1+2ih_2\right)\\-i\left(d_1+2id_2-f_3-g_1-2ig_2+h_3\right)\\d_1-id_2+2f_3-g_1+ig_2-2h_3\\-2d_3+f_1+if_2+2g_3-h_1-ih_2\\-d_1+id_2-2f_3+g_1-ig_2+2h_3\\2d_3-f_1-if_2-2g_3+h_1+ih_2\end{array}\right|=\left|\begin{array}{r}0\\0\\0\\0\\P_1\\P_2\\-P_1\\-P_2\\P_3\\P_4\\-P_3\\-P_4\\P_5\\P_6\\-P_5\\-P_6\end{array}\right|. \tag{11}$$

$$\Psi_{+}=\frac{1}{6}\left|\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\d_3+2f_1-if_2+g_3+2h_1-ih_2\\2d_1+id_2-f_3+2g_1+ig_2-h_3\\d_3+2f_1-if_2+g_3+2h_1-ih_2\\2d_1+id_2-f_3+2g_1+ig_2-h_3\\-i\left(d_3-f_1+2if_2+g_3-h_1+2ih_2\right)\\-i\left(d_1+2id_2+f_3+g_1+2ig_2+h_3\right)\\-i\left(d_3-f_1+2if_2+g_3-h_1+2ih_2\right)\\-i\left(d_1+2id_2+f_3+g_1+2ig_2+h_3\right)\\-d_1+id_2+2f_3-g_1+ig_2+2h_3\\2d_3+f_1+if_2+2g_3+h_1+ih_2\\-d_1+id_2+2f_3-g_1+ig_2+2h_3\\2d_3+f_1+if_2+2g_3+h_1+ih_2\end{array}\right|=\left|\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\L_1\\L_2\\L_1\\L_2\\L_3\\L_4\\L_3\\L_4\\L_5\\L_6\\L_5\\L_6\end{array}\right| \tag{12}$$

При переходе к нерелятивистскому приближению компоненту Ψ_+ рассматриваем как «большую», а Ψ_- и Ψ_0 — как «малые»: $P_i \ll L_i,; S_i \ll L_i,.$ В общей сложности имеем 20 переменных.

$$\Psi_+: \ \{L_1,...,L_6\}; \quad \Psi_0: \ \{S_1,...,S_8\}, \quad \Psi_-: \ \{P_1,...,P_6\}. \tag{13}$$

Между большими и малыми компонентами существуют соотношения (ограничения), которые позволяют выразить часть переменных через другие:

$$iL_3 = L_6 - L_1, \quad iL_4 = L_5 + L_2, \tag{14}$$

$$P_1 + iP_3 - P_6 = 0, \quad P_2 - iP_4 + P_5 = 0. \tag{15}$$

Введя новые обозначения $y_1,...,y_{12}$,

$$S_5 + P_1 = y_1, \quad S_6 + P_2 = y_2, \quad S_7 - P_1 = y_3, \quad S_8 - P_2 = y_4, \tag{16}$$

$$iS_5 + P_3 = y_5, \quad iS_6 + P_4 = y_6, \quad iS_7 - P_3 = y_7, \quad iS_8 - P_4 = y_8, \tag{17}$$

$$S_6 + P_5 = y_9, \quad -S_5 + P_6 = y_{10}, \quad S_8 - P_5 = y_{11}, \quad -S_7 - P_6 = y_{12}, \tag{18}$$

четыре независимые переменные S_5, S_6, S_7, S_8 могут быть выражены через 12 вспомогательных y-переменных. Это обеспечивает возможность построения замкнутой системы для независимых больших компонент.

4. Нерелятивистское приближение

Нерелятивистское приближение возможно только в моделях пространства–времени со следующей структурой:

$$dS^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x)\,dx^i dx^j, \quad e_{(a)\alpha}(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e_{(i)k}(x) \end{vmatrix}. \tag{19}$$

В этих моделях ненулевыми оказываются лишь четыре связи:

$$\Sigma_0 = \frac{1}{2}\, J^{ik} e^m_{(i)} \left(\nabla_0 e_{(k)m}\right), \quad \Sigma_l = \frac{1}{2}\, J^{ik} e^m_{(i)} \left(\nabla_l e_{(k)m}\right), \tag{20}$$

а вклад трёх генераторов J^{01}, J^{02}, J^{03} отсутствует.

Базовое матричное уравнение в нерелятивистской метрике для частицы со спином 3/2 имеет следующий вид:

$$\left(Y^0 \bar{D}_0 + Y^1 \bar{D}_1 + Y^2 \bar{D}_2 + Y^3 \bar{D}_3 + iM\right)\Psi = 0, \tag{21}$$

где

$$\begin{gathered} \bar{D}_0 = \left(\partial_0 + ieA_0\right) + \left(\sigma^{23} \otimes I + I \otimes j^{23}\right)\gamma_{[23]0} + \\ \left(\sigma^{31} \otimes I + I \otimes j^{31}\right)\gamma_{[31]0} + \left(\sigma^{12} \otimes I + I \otimes j^{12}\right)\gamma_{[12]0}, \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} \bar{D}_1 = e^k_{(1)}\left(\partial_k + ieA_k\right) + \left(\sigma^{23} \otimes I + I \otimes j^{23}\right)\gamma_{[23]1} + \\ \left(\sigma^{31} \otimes I + I \otimes j^{31}\right)\gamma_{[31]1} + \left(\sigma^{12} \otimes I + I \otimes j^{12}\right)\gamma_{[12]1}, \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} \bar{D}_2 = e^k_{(2)}\left(\partial_k + ieA_k\right) + \left(\sigma^{23} \otimes I + I \otimes j^{23}\right)\gamma_{[23]2} + \\ \left(\sigma^{31} \otimes I + I \otimes j^{31}\right)\gamma_{[31]2} + \left(\sigma^{12} \otimes I + I \otimes j^{12}\right)\gamma_{[12]2}, \end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\bar{D}_3=\left(\partial_k+ieA_k\right)+\left(\sigma^{23}\otimes I+I\otimes j^{23}\right)\gamma_{[23]3}+\\&\left(\sigma^{31}\otimes I+I\otimes j^{31}\right)\gamma_{[31]3}+\left(\sigma^{12}\otimes I+I\otimes j^{12}\right)\gamma_{[12]3}.\end{aligned}\tag{25}$$

В этом уравнении можно выделить слагаемые, различающиеся по своему физическому смыслу: одни отвечают за динамику в электромагнитном поле, другие — за геометрические эффекты, связанные с коэффициентами Риччи. Для 12 коэффициентов Риччи, необходимых в дальнейших выводах, удобно ввести следующие специальные обозначения:

$$\begin{aligned}&G_{10}=\gamma_{230},\quad G_{20}=\gamma_{310},\quad G_{30}=\gamma_{120},\\&G_{11}=\gamma_{231},\quad G_{21}=\gamma_{311},\quad G_{31}=\gamma_{121},\\&G_{12}=\gamma_{232},\quad G_{22}=\gamma_{312},\quad G_{32}=\gamma_{122},\\&G_{13}=\gamma_{233},\quad G_{23}=\gamma_{313},\quad G_{33}=\gamma_{123}.\end{aligned}\tag{26}$$

В основном уравнении (21) можно выделить две части:

$$\left(Y^0D_0+Y^1D_1+Y^2D_2+Y^3D_3+iM\right)\Psi+\left(Q^0\Psi+Q^1\Psi+Q^2\Psi+Q^3\Psi\right)=0,\tag{27}$$

где

$$D_0=\left(\partial_0+ieA_0\right),\quad D_1=e^k_{(1)}\left(\partial_k+ieA_k\right),\quad D_2=e^k_{(2)}\left(\partial_k+ieA_k\right),\quad \bar{D}_3=\left(\partial_k+ieA_k\right),\tag{28}$$

$$Q^0\Psi=Y^0\left[\left(\sigma^{23}\Psi+\Psi\tilde{j}^{23}\right)G_{10}+\left(\sigma^{31}\Psi+\Psi\tilde{j}^{31}\right)G_{20}+\left(\sigma^{12}\Psi+\Psi\tilde{j}^{12}\right)G_{30}\right],\tag{29}$$

$$Q^1\Psi=Y^1\left[\left(\sigma^{23}\Psi+\Psi\tilde{j}^{23}\right)G_{11}+\left(\sigma^{31}\Psi+\Psi\tilde{j}^{31}\right)G_{21}+\left(\sigma^{12}\Psi+\Psi\tilde{j}^{12}\right)G_{31}\right],\tag{30}$$

$$Q^2\Psi=Y^2\left[\left(\sigma^{23}\Psi+\Psi\tilde{j}^{23}\right)G_{12}+\left(\sigma^{31}\Psi+\Psi\tilde{j}^{31}\right)G_{22}+\left(\sigma^{12}\Psi+\Psi\tilde{j}^{12}\right)G_{32}\right],\tag{31}$$

$$Q^3\Psi=Y^3\left[\left(\sigma^{23}\Psi+\Psi\tilde{j}^{23}\right)G_{13}+\left(\sigma^{31}\Psi+\Psi\tilde{j}^{31}\right)G_{23}+\left(\sigma^{12}\Psi+\Psi\tilde{j}^{12}\right)G_{33}\right].\tag{32}$$

После проведения необходимых преобразований и разделения всех компонент на большие и малые получается 16 достаточно громоздких уравнений, которые здесь не воспроизводятся.

Известно, что при выполнении нерелятивистского приближения вовлеченным величинам приписываются следующие порядки малости:

$$L_{..}\sim 1,\quad S_{..},\quad y_{..}\sim x,\quad \frac{D_j}{M}\sim x,\quad \frac{G_{ij}}{M}\sim x,\quad \frac{D_0}{M}\sim x^2,\quad \frac{G_{j0}}{M}\sim x^2.\tag{33}$$

В дальнейшем нам понадобятся только уравнения порядков x и x^2. С учётом этого система разделяется на уравнения указанных порядков.

Уравнения порядка x позволяют выразить малые компоненты через производные D_0 и D_j, действующие на большие компоненты L_1,L_2,L_5,L_6, а также через коэффициенты Риччи. Подставляя эти малые компоненты в уравнения порядка x^2, получаем шесть уравнений для четырёх независимых больших переменных L_1,L_2,L_5,L_6. Эти уравнения содержат члены вида $2MD_0L_A$, где $A=1,2,5,6$. Можно показать, что лишь четыре из этих уравнений являются независимыми. В дальнейшем мы будем работать именно с этим сокращённым набором. Так как уравнения остаются достаточно громоздкими, мы временно исключаем все члены, содержащие коэффициенты вращения Риччи, что фактически соответствует возвращению к случаю декартовых координат в пространстве Минковского.

Далее преобразуем эту систему из четырёх уравнений к новому набору переменных:

$$\Psi_1 = L_1 + L_6, \quad \Psi_2 = L_2 - L_5, \quad \Psi_3 = 2L_1 - L_6, \quad \Psi_4 = 2L_2 + L_5. \tag{34}$$

При следующих обозначениях:

$$D_2D_3 - D_3D_2 = D_{23}, \quad D_3D_1 - D_1D_3 = D_{31}, \quad D_1D_2 - D_2D_3 = D_{12}, \tag{35}$$

$$\Delta = \left(D_1D_1 + D_2D_2 + D_3D_3\right), \quad D_0 = \partial_0 + ieA_0, \quad D_j = e^k_{(j)}\left(\partial_k + ieA_k\right), \tag{36}$$

они имеют вид:

$$MiD_0\Psi_1 + \frac{1}{2}\Delta\Psi_1 - i\frac{1}{6}D_{12}\Psi_1 + \frac{1}{2}D_{31}\Psi_2 - \frac{i}{6}D_{23}\Psi_2 + \frac{i}{3}D_{12}\Psi_3 + \frac{i}{3}D_{23}\Psi_4 + \ldots = 0, \tag{37}$$

$$MiD_0\Psi_2 + \frac{1}{2}\Delta\Psi_2 + \frac{i}{6}D_{12}\Psi_2 - \frac{1}{2}D_{31}\Psi_1 - \frac{i}{6}D_{23}\Psi_1 + +\frac{i}{3}D_{23}\Psi_3 - \frac{i}{3}D_{12}\Psi_4 + \ldots = 0, \tag{38}$$

$$MiD_0\Psi_3 + \frac{1}{2}\Delta\Psi_3 + \frac{i}{2}D_{12}\Psi_3 + \frac{1}{3}D_{31}\Psi_2 + \frac{i}{3}D_{23}\Psi_2 - \frac{1}{6}D_{31}\Psi_4 - \frac{i}{6}D_{23}\Psi_4 + \ldots = 0, \tag{39}$$

$$MiD_0\Psi_4 + \frac{1}{2}\Delta\Psi_4 - \frac{i}{2}D_{12}\Psi_4 - \frac{1}{3}D_{31}\Psi_1 + \frac{i}{3}D_{23}\Psi_1 + \frac{1}{6}D_{31}\Psi_3 - \frac{i}{6}D_{23}\Psi_3 + \ldots = 0, \tag{40}$$

где многоточие обозначает опущенные слагаемые. Эта система может быть записана в компактной матричной форме:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{vmatrix}, \quad iMD_0\Psi + \frac{1}{2}\Delta\Psi + \left(S_1D_{23} + S_2D_{31} + S_3D_{12}\right)\Psi = 0, \tag{41}$$

$$S_1 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{i}{2} & 0 & -i \\ \frac{i}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & \frac{i}{2} \\ -i & 0 & \frac{i}{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad S_3 = \begin{vmatrix} \frac{i}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 & i \\ 0 & 0 & -\frac{3i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3i}{2} \end{vmatrix}, \tag{42}$$

Эти матрицы удовлетворяют стандартным коммутаторным соотношениям. $S_iS_j - S_jS_i = \epsilon_{i,j,k}S_k$. С помощью подходящего линейного преобразования вводятся новые спиновые матрицы

$$\overline{S}_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \overline{S}_2 = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{i}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3i}{2} & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -\frac{3i}{2} \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \end{vmatrix}, \quad \overline{S}_3 = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}. \tag{43}$$

Если теперь провести аналогичные вычисления, но сохранив все члены, содержащие коэффициенты Риччи, система принимает более сложный вид. Её также можно записать в матричной форме.

$$\begin{gathered}2M\left(D_0+A_0\right)\Psi+\left(S_1D_{23}+S_2D_{31}+S_3D_{12}\right)\Psi+\\ \left(D_1A_1\right)\Psi+\left(A_1+B_1\right)D_1\Psi+\left(D_2A_2\right)\Psi+\left(A_2+B_2\right)D_2\Psi+\\ \left(D_3A_3\right)\Psi+\left(A_3+B_3\right)D_3\Psi+\Delta\Psi=0.\end{gathered} \tag{44}$$

Матрицы A_0, A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3 линейно зависят от девяти коэффициентов Риччи; матрица Δ зависит от произведений коэффициентов Риччи $G_{..}\times G_{..}$.

Оказывается, что все эти матрицы могут быть разложены в линейные комбинации девяти независимых базисных элементов (спиновых матриц и их произведений):

$$\begin{gathered}S_1=t_1,\quad S_2=t_2,\quad S_3=t_3,\\ S_1^2=t_4,\quad S_2^2=t_5,\quad S_3^2=t_6,\\ S_2S_3=t_7,\quad S_3S_1=t_8,\quad S_1S_2=t_9,\end{gathered} \tag{45}$$

и аналогичные разложения выполняются также для матриц A_0 и Δ.

Таким образом, в нерелятивистском гамильтониане возникают дополнительные геометрические члены, которые зависят от коэффициентов вращения Риччи G_{ab}, скаляра Риччи $R(x)$ и тетрадных компонент тензора Риччи:

$$R_{\alpha\beta}(x)\quad\Rightarrow\quad R_{ab}(x)=e^{\alpha}_{(a)}e^{\beta}_{(b)}R_{\alpha\beta}(x). \tag{46}$$

5. Пример: частица в электрическом и магнитном полях

Используя цилиндрические координаты $x^{\alpha}=(t,r,\phi,z)$, рассмотрим случай однородных электрического и магнитного полей:

$$dS^2=dt^2-dr^2-r^2d\phi^2-dz^2,\quad e^{\alpha}_{(a)}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/r&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}, \tag{47}$$

$$0\Rightarrow t,\quad 1\Rightarrow r,\quad 2\Rightarrow\phi,\quad 3\Rightarrow z,\quad \gamma_{122}=\frac{1}{r}, \tag{48}$$

$$D_0=\partial_0+ieA_0,\ D_1=\partial_r+ieA_r,\ D_2=\frac{1}{r}\left(\partial_\phi+ieA_\phi\right),\ D_3=\partial_z+ieA_z,\ \gamma_{122}=\frac{1}{r}, \tag{49}$$

Обратимся к ситуации, когда магнитное и электрическое поля действуют вдоль оси z.

$$D_0=\partial_t+ieEz,\quad D_1=\partial_r,\ D_2=\frac{1}{r}\left(\partial_\phi+ie\frac{Br^2}{2}\right),\ D_3=\partial_z, \tag{50}$$

$$A_0=0,\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+(\frac{1}{r}\partial_\phi+\frac{ieB}{2}r)^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{51}$$

$$D_{23}=0,\quad D_{31}=0,\quad D_{12}=-\frac{1}{r^2}\left(\partial_\phi - ie\frac{Br^2}{2}\right), \tag{52}$$

В этом случае основное уравнение типа Паули принимает вид:

$$i\left(\partial_t + ieEz\right)\overline{\Psi} = -\frac{1}{2M}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{r}\partial_\phi+\frac{ieB}{2}r\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\overline{\Psi}+\frac{i}{3M}\frac{1}{r^2}\left(\partial_\phi - ie\frac{Br^2}{2}\right)\overline{S}_3\overline{\Psi} -$$
$$\frac{i}{2M}\left[\left(\partial_r \overline{A}_1\right)+\left(\overline{A}_1+\overline{B}_1\right)\partial_r+\left(\overline{A}_2+\overline{B}_2\right)\frac{1}{r}\left(\partial_\phi + ie\frac{Br^2}{2}\right)+\left(\overline{A}_3+\overline{B}_3\right)\partial_z+\overline{\Sigma}\right]\overline{\Psi}=0. \tag{53}$$

При этом участвующие матрицы имеют следующий вид:

$$\left(\partial_r \overline{A}_1\right)=\frac{i}{r^2}\begin{vmatrix}9&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{vmatrix},\quad \overline{A}_1+\overline{B}_1=-\frac{6i}{r}I,\quad \overline{A}_2+\overline{B}_2=-\frac{8}{r}\begin{vmatrix}-3/2&0&0&0\\0&-1/2&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&3/2\end{vmatrix}, \tag{54}$$

$$\overline{A}_3+\overline{B}_3=0,\quad \overline{\Sigma}=\frac{3i}{r^2}\begin{vmatrix}9&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{vmatrix},\quad \overline{S}_3=\begin{vmatrix}-3/2&0&0&0\\0&-1/2&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&3/2\end{vmatrix}. \tag{55}$$

Эта структура показывает, что в цилиндрическом базисе нерелятивистское уравнение распадается на четыре несвязанных уравнения одинакового вида. Соответственно, гамильтониан принимает особо простой вид.

6. Заключение

Цель настоящей работы заключалась в разработке процедуры выполнения нерелятивистского приближения в рамках 39-компонентной теории первого порядка для частицы со спином 3/2 в искривлённом пространстве-времени при наличии внешних электромагнитных полей.

Для разделения больших и малых компонент полной волновой функции были использованы три проективных оператора, построенные на основе минимального многочлена четвёртой степени для матрицы $\Gamma^0_{16\times16}$. Соответствующие большие и малые компоненты получены в явном виде, среди них выделены независимые переменные; в частности, среди больших компонент независимыми оказываются только четыре.

Следуя стандартной процедуре, выведена нерелятивистская система уравнений для четырёхкомпонентной волновой функции. Полученный гамильтониан зависит от электромагнитного поля, а дополнительные геометрические члены определяются коэффициентами вращения Риччи; эти члены выражаются через скаляр Риччи R и тензор Риччи R_{ab} в тетрадной форме. Отдельно выделен член, описывающий взаимодействие магнитного момента частицы со спином 3/2 с внешним магнитным полем; этот дополнительный член построен с использованием спиновых матриц S_i и компонент вектора магнитного поля **B**.

Данное исследование поддержано Комитетом по Науке Армении (грант Nos. 21AG-1C064 и 23AA-1C030).

Авторы не имеют конфликт интересов.

Авторы в равной степени внесли свой вклад в данную работу в концептуализации исследования, математических выводах и написании рукописи. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **W. Pauli, M. Fierz.** Helvetica Physica Acta, **12**, 297 (1939).
2. **M. Fierz, W. Pauli.** Proc. Roy. Soc. London A, **173**, 211 (1939).
3. **W. Rarita, J. Schwinger.** Phys. Rev., **60**, 61 (1941).
4. **V.L. Ginzburg.** Journal of Experimental and Theoretical Physics, **12**, 425 (1942) [in Russian].
5. **I.M. Gelfand, A.M. Yaglom.** Journal of Experimental and Theoretical Physics, **18**, 703 (1948) [in Russian].
6. **E.S. Fradkin.** Journal of Experimental and Theoretical Physics, **20**, 27 (1950) [in Russian].
7. **F.I. Fedorov.** Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR, **82**, 37 (1952) [in Russian].
8. **V. Ya. Feinberg.** Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR, **6**, 269 (1955) [in Russian].
9. **K. Johnson, E.C.G. Sudarshan.** Ann. Phys. (N.Y.), **13**, 121 (1961).
10. **C.R. Hagen, L.P.S. Singh.** Phys. Rev. D, **26**, 393 (1982).
11. **V.V. Kisel, et al.,** Elementary particles with internal structure in external fields. I. General theory, II. Physical problems. Nova Science Publishers, New York (2018).
12. **A.V. Ivashkevich, V.V. Kisel, V.M. Red’kov, A.M. Ishkhanyan.** Nonlinear Phenomena in Complex Systems, **26**, 257 (2023).
13. **A.V. Ivashkevich, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red’kov.** Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus, **63**, 282 (2019) [in Russian].
14. **A.V. Ivashkevich, E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red’kov.** Nonlinear Phenomena in Complex Systems, **27**, 341 (2024).
15. **A.V. Ivashkevich, V.M. Red’kov, A.M. Ishkhanyan.** Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus, **68**, 18 (2024).
16. **A.V. Bury, A.V. Ivashkevich.** Vestnik of Brest University. Ser. 4. Physics and Mathematics, **1**, 22 (2024).
17. **A.V. Ivashkevich, V.M. Red’kov, A.M. Ishkhanyan.** Physics of Particles and Nuclei, **56**, 1 (2025).
18. **F.I. Fedorov.** Proceedings of Belorussian State University. Ser. phys.-math., **12**, 156 (1951) [in Russian].
19. **T. Regge.** Nuovo Cimento, **5**, 325–326 (1957).

NONRELATIVISTIC APPROXIMATION FOR A SPIN-3/2 PARTICLE IN COMBINED ELECTROMAGNETIC AND GRAVITATIONAL FIELDS

A.V. IVASHKEVICH, V.M. RED'KOV, M.K. MARGARYAN, A.M. ISHKHANYAN

This paper investigates the nonrelativistic approximation in the first-order 39-component theory for a spin-3/2 particle in curved spacetime under external electromagnetic fields. Starting from the generally covariant matrix equations, generalized via the Weyl-Fock-Ivanenko tetrad method, we employ explicit forms of the four main Γ^{a} matrices of dimension 16×16 within the corresponding first-order system. The analysis is carried out for spacetime metrics that permit the existence of nonrelativistic equations.

To separate the large and small components of the complete wave function, three projective operators are constructed from the fourth-order minimal polynomial of the 16×16 Γ^{0} matrix. The explicit forms of these components are obtained, and the set of independent variables is identified; in particular, only four large components are independent.

Following the standard procedure, we derive the nonrelativistic system of equations for a 4-component wave function. The resulting Hamiltonian includes contributions from the electromagnetic field and additional geometric terms expressed through the Ricci rotation coefficients, Ricci scalar R and Ricci tensor R_{ab}. We also isolate the term describing the interaction between the magnetic moment of the spin-3/2 particle and the external magnetic field. This interaction term is expressed via the spin matrices S_{i} and the components of the magnetic field vector **B**.