ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XL 1965 5

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Г. И. Тер-Степанян

Проективная анаморфоза экспериментальных кривых для нахождения эмпирических формул

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 17/VII 1964)

Составление эмпирических формул при обработке экспериментальных данных весьма облегчается, если удается так подобрать шкалы на координатных осях, чтобы зависимость между переменными выразилась прямой линией. В ряде случаев такая анаморфоза достигается применением логарифмических шкал на одной или обеих осях координат, в других случаях на одной из осей откладывают квадратные корни из значений переменной и т. д. Сам факт спрямления кривых на таких графиках определяет вид эмпирических формул (логарифмической, экспоненциальной, степенной и др. функций).

Однако выбор функциональных зависимостей для построения таких шкал более или менее случаен, довольно ограничен и совершенно негибок. Различные типы функциональных шкал, которые могут применяться для этих построений, не связаны взаимными переходами. Несравненно более широкие возможности представляются при применении проективных шкал; их аналитическим выражением являются дробно-линейные функции относительно $f(u)$. Уравнения проективных шкал имеют общий вид

$$y=\frac{f(u)\,d}{f(u)+p},$$

где $f(u)$ некоторая первичная функция, d — длина проективной шкалы, а p — параметр преобразования, могущий принимать любые положительные или отрицательные значения. Анализ параметра преобразования дан в ([1]).

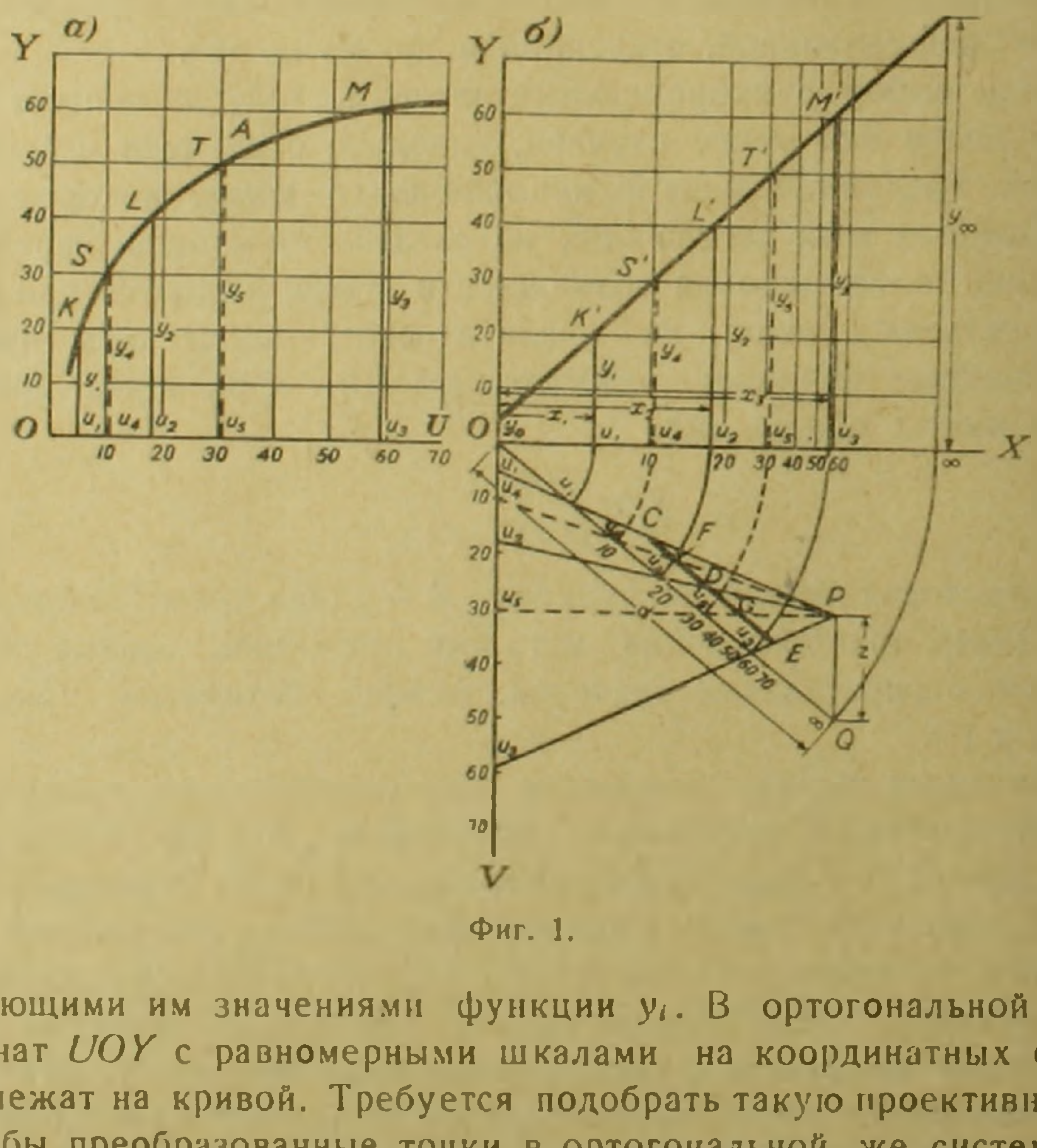
Проективная шкала получается при центральном проектировании шкалы первичной функции на некоторую прямую. Проективные шкалы образуют ряд семейств, отличающихся видом первичной функции. Каждое из этих семейств представляет собой бесконечное количество шкал, отличающихся значением параметра преобразования.

Ограничимся рассмотрением простейших дробно-линейных функций, в которых первичная функция равна переменному u. Эти функции рациональны; удобства пользования рациональными функциями для дальнейшей аналитической обработки общеизвестны.

Ниже описывается метод, позволяющий спрямить любые фиксированные точки исследуемой функциональной зависимости. Этот метод применим к любым монотонно изменяющимся функциям, если они не имеют точки перегиба. Если функциональная зависимость обладает несколькими экстремумами, или кривая имеет точки перегиба, то, применяя предлагаемый метод последовательно к каждому участку кривой между двумя соседними экстремумами или точками перегиба, можно достичь спрямления и такой кривой. Спрямление достигается в результате соответствующего подбора значения параметра преобразования проективной шкалы; описываемый метод отличается большой гибкостью.

Различаются внутренние и внешние проективные шкалы. Внутренние проективные шкалы являются сходящимися на всем интервале значения переменной u от 0 до ∞. Внешние проективные шкалы являются расходящимися в интервале значений $0 < u < p$ и сходящимися для значения $p < u < \infty$; при $u = p$ пометка внешней проективной шкалы удаляется в бесконечность.

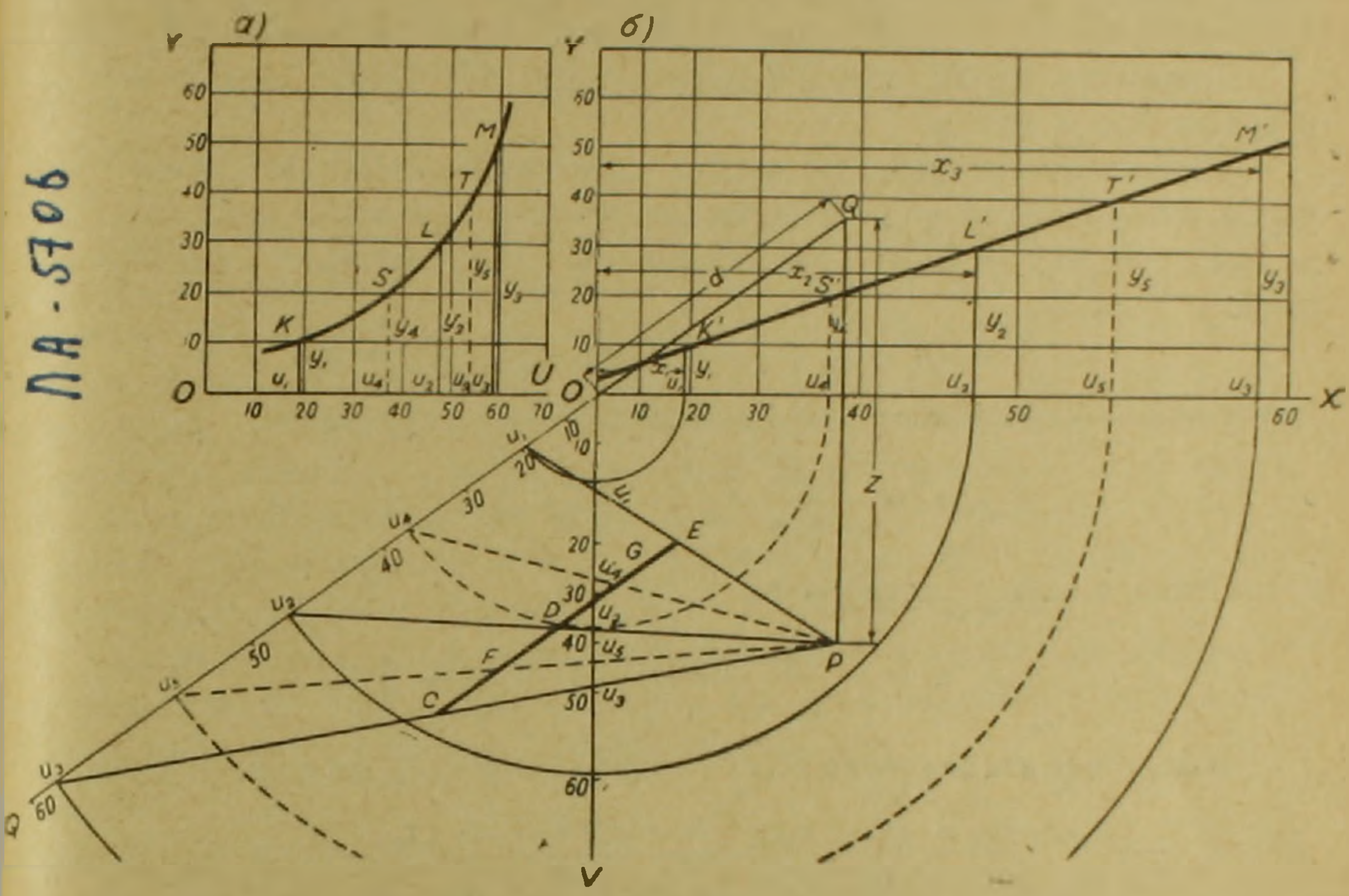
Проективные шкалы могут быть построены на любой координатной оси. Ниже рассматривается их применение на оси абсцисс. Пусть имеется некоторое ограниченное количество экспериментальных точек, определяемых значениями независимых переменных u_i и соот-



Фиг. 1.

ветствующими им значениями функции y_i. В ортогональной системе координат UOY с равномерными шкалами на координатных осях эти точки лежат на кривой. Требуется подобрать такую проективную шкалу, чтобы преобразованные точки в ортогональной же системе координат XOY с проективной шкалой на оси абсцисс и равномерной—на оси ординат лежали на прямой или равномерно мало уклонялись от нее. Очевидно, что если функция вогнутая (кривая A, фиг. 1a), то для спрямления кривой следует на оси абсцисс применить сходящуюся, т. е. внутреннюю проективную шкалу; если же она выпуклая (кривая B, фиг. 2a), то шкала на оси абсцисс должна быть расходящейся, т. е. внешней проективной.

В сформулированной постановке эта задача напоминает задачу о приближении функции в смысле П. Л. Чебышева, т. е. нахождение по данной функции $y' = \varphi(u)$ такой приближающей функции $y = F(u)$,



Фиг. 2.

чтобы последняя на рассматриваемом отрезке $[r, s]$ равномерно мало отличалась от заданной функции. В простейшей интерполяционной задаче приближающая функция определяется из условия совпадения ее значения со значением заданной функции в фиксированном числе точек, называемых узлами интерполяции.

Поскольку аналитическое выражение заданной функции отсутствует и рассматриваемая функциональная зависимость дана в виде графика, то мерой уклонения приближающей функции от исследуемой функциональной зависимости может служить выражение

$$D = \max (y' - y), \quad [r \leq u \leq s]. \qquad (1)$$

Увеличивая число узлов интерполяции, можно улучшить условия приближения функции; одновременно усложняется решение задачи. Поэтому нужно соразмерно назначить число этих узлов. Минимальное число узлов интерполяции равно трем. Для упрощения решения примем именно такое число узлов и будем анализировать полученную меру уклонения, согласно выражению (1). Если мера уклонения окажется выше допустимой, то будем увеличивать число узлов интерполяции, назначая их в наиболее неблагополучных точках графика. Такой подход обеспечит достаточную с практической точки зрения точность решения, сочетаемую с возможной простотой.

Выберем на исходном графике (фиг. 1*а* и 2*а*) три точки K (u_1, y_1), L (u_2, y_2) и M (u_3, y_3), которые будем рассматривать как узлы интерполяции, и подберем то значение параметра преобразования, которое переводит эти точки исходного графика в лежащие на одной прямой точки K', L' и M' преобразованного графика (фиг. 1*б* и 2*б*).

Параметр преобразования может быть определен аналитическим и графическим путем.

Аналитическое решение задачи спрямления кривой в случае трех узлов интерполяции определяется из условия равенства нулю площади треугольника $K'L'M'$, образованного тремя точками преобразованного графика,

$$x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0. \tag{2}$$

Внутренние проективные шкалы выражаются уравнением

$$x_i = \frac{u_i d}{u_i + p} = \left(1 - \frac{p}{u_i + p}\right) d,$$

а внешние шкалы — уравнением

$$x_i = -\frac{u_i d}{u_i - p} = \left(-1 - \frac{p}{u_i - p}\right) d.$$

Подставляя эти значения в (2) и производя преобразования, получаем

$$p = \pm \frac{u_1 u_2 (y_1 - y_2) + u_2 u_3 (y_2 - y_3) + u_3 u_1 (u_3 - y_1)}{(u_1 + u_2)(y_1 - y_2) + (u_2 + u_3)(y_2 - y_3) + (u_3 + u_1)(y_3 - y_2)}, \tag{3}$$

где знак плюс относится к внешним проективным шкалам, а минус к внутренним. Получив значение параметра преобразования, можно построить проективную шкалу ([2]).

При четырех узлах интерполяции задача сводится к решению уравнения второй степени, при пяти—третьего и т. д. Эти решения громоздки и заставляют в таких случаях предпочесть описываемое ниже более простое графическое определение.

Графическое определение значения параметра преобразования ([2]) может быть выполнено одновременно с построением проективной шкалы; оно особенно удобно при числе узлов интерполяции превышающем три.

На графике UOY с равномерными шкалами для координатных осей выбираются две точки K (u_1, y_1) и M (u_3, y_3), достаточно далеко отстоящие друг от друга, но и не находящиеся на концах кривой. Затем определяется положение третьей точки L (u_2, y_2) таким образом, чтобы ее ордината равнялась полусумме* ординат точек K и M.

---

* В общем случае может быть выбрано любое соотношение между ординатами точек; оно отражается только на расположении точки D на отрезке CE (см. ниже).

Строим первичную равномерную шкалу OV с коэффициентом шкалы a и на ней отмечаем положение пометок u_1, u_2 и u_3. Выбираем произвольный полюс P и проводим от него лучи к указанным пометкам первичной шкалы. Затем к этому построению прикладываем масштабную линейку и ищем такое ее положение, при котором три ее точки C, D и E, находящиеся на произвольном, но равном расстоянии друг от друга, расположились на упомянутых трех лучах, проведенных от полюса P.

Из начала координат O проводим прямую OQ, параллельную найденному положению отрезка CE, и продолжаем ее до пересечения с прямой PQ, проведенной из P параллельно первичной шкале OV. Отрезок OQ определит длину проективной шкалы, а отрезок PQ — ее полюсное расстояние z; отсюда находим параметр преобразования $p = az$.

Прямая OQ представляет собой проективную шкалу. В случае внешних проективных шкал все сказанное относится к прямой OQ'. Пометки проективной шкалы получаются на пересечении лучей, идущих из полюса P к пометкам первичной шкалы OV. Треугольник, образованный лучами, идущими из полюса P к пометкам u_1 и u_3 на прямой OQ, подобен треугольнику PCE по построению. Луч Pu_2 делит сторону CE пополам, поэтому $u_1u_2 = u_2u_3$ и абсцисса x_2 будет равна полусумме абсцисс x_1 и x_3. Поэтому точки K', L' и M' на преобразованном графике должны лежать на одной прямой.

После спрямления графика составление эмпирической формулы не представляет труда. Если функция вогнутая и применяются внутренние проективные шкалы, формула имеет вид

$$y = m - \frac{n}{u + p}, \tag{4}$$

где $m = y_0 + (y_3 - y_0)\,\dfrac{u_3 + p}{u_3}$ и $n = (y_3 - y_0)\,\dfrac{u_3 + p}{u_3}\,p$.

Если же функция выпуклая и применяются внешние проективные шкалы, имеем

$$y = m + \frac{n}{u - p}, \tag{5}$$

где $m = y_0 + (y_3 - y_0)\,\dfrac{u_3 - p}{u_3}$ и $n = (y_3 - y_0)\,\dfrac{u_3 - p}{u_3}\,p$.

Оценка точности преобразованного графика производится в соответствии с уравнением (1). Практически выбираются две точки S и T, расположенные между узлами интерполяции K, L и M. Удобно, когда ординаты точек S и T равняются полусумме ординат соседних узлов интерполяции, поскольку именно в таких точках следует ожидать наибольшую величину уклонения D. Графическое построение преобразованных абсцисс u_4 и u_5 точек S и T показано на графике пунктиром. Перенеся эти точки на ось абсцисс, откладываем ординаты y_4 и y_5 точек S и T. Если разность ординат преобразованного графика и действительных ординат точек S и T находится в допустимых из практических соображений пределах, то задача может считаться решенной. Если же величина уклонения D выше допустимой, то может быть сделано второе построение при большом числе узлов интерполяции. Для второго построения может быть использован тот же график.

Сохраняем полюс P с пятью лучами к пометкам от u_1 до u_5 первичной шкалы OV и вводим дополнительные деления F и G на отрезке CE, так, чтобы теперь он состоял из четырех равных отрезков. Ищем такое положение отрезка CE (или полоски бумаги с соответствующими делениями), при котором все пять делений (от C до G) на отрезке CE находились бы на равных расстояниях от соответствующих лучей. Все дальнейшее производится, как описано выше. Таким образом, это построение производится уже при пяти узлах интерполяции.

Дальнейшее усовершенствование может быть достигнуто применением иных функциональных шкал в качестве первичных. Среди них заслуживают внимания шкалы степенных функций $y = u^b$, где b — натуральное число, приводящее к проективным шкалам, также выражаемым рациональными дробно-степенными функциями.

В качестве примера применения предлагаемого метода произведем анаморфозу и напишем эмпирические формулы для кривых A и B (фиг. 1*а* и 2*а*). На кривой A выбираем три точки K (5.2 ,20), L (18, 40) и M (59, 60). Из (1) находим $p = -20$, что соответствует графическому определению при $z = 2{,}0$ *cm* и $a = 10$ *см*$^{-1}$. Построив преобразованный график (фиг. 1*б*), находим $y_0 = 4$. Из (4) определяем $m = 79$ и $n = 1500$, откуда уравнение кривой A имеет вид

$$y = 79 - \frac{1500}{u+20}.$$

На кривой B выбираем три точки K (19,10), L (47.5,30) и M (59,50). Из (1) находим $p = 86$, что соответствует величине полюсного расстояния $z = 8{,}6$ *см* и $a = 10$ *см*$^{-1}$. Строим преобразованный график (фиг. 2*б*) и определяем $y_0 = 3$. Из (5) находим $m = -18$ и $n = -1850$, откуда уравнение кривой B имеет вид

$$y = -18 - \frac{1850}{u-86}.$$

При проективной анаморфозе экспериментальных кривых различные типы проективных шкал неравноценны. Внутренние проективные шкалы более компактны, легче обозримы и позволяют сразу установить значение y_∞, к которому стремится функция при бесконечно больших значениях независимой переменной, если имеется уверенность в допустимости такой экстраполяции. Это значение $y_\infty = 79$ показано на фиг. 1*б*.

Учитывая указанные преимущества внутренних проективных шкал, в ряде случаев может оказаться полезным при спрямлении выпуклой кривой (фиг. 2*б*) строить проективные шкалы на оси ординат; в этом случае, естественно, должны применяться внутренние шкалы.

Институт геологических наук
Академии наук Армянской ССР

Գ. Ի. ՏԵՐ-ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ

Էքսպերիմենտալ կորերի պրոեկտիվ անամորֆոզա էմպիրիկ բանաձևեր գտնելու համար

Էմպիրիկ բանաձևերի կազմումը հեշտանում է, եթե հնարավոր է այնպես ձևափոխել էքսպերիմենտալ կորի գրաֆիկի կոորդինատների առանցքները, որ կորը վերածվի մի ուղիղի։ Նկարագրվում է պարզ գրաֆիկ ձև, որը թույլ է տալիս ցանկացած մոնոտոն փոփոխվող, շրջման կետ չունեցող կորերի համար կոորդինատային առանցքներից մեկի համար գտնել այնպիսի պրոեկտիվ սանդղակ, որը կորը ձևափոխում է ուղիղի։ Ցույց է տրվում պրոեկտիվ սանդղակի ձևափոխման պարամետրի որոշման եղանակը, ձևափոխված կորի կառուցման ընթացքը և բանաձևի տեսքը։ Տրվում են երկու օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. И. Тер-Степанян*, ДАН АрмССР, т. 35, № 5, 197—202 (1962). [2] *Г. И. Тер-Степанян*, Инженерные цепные номограммы с прямолинейными шкалами, Изд. АН АрмССР, 1965.