ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XL 1965 5

МАТЕМАТИКА

Л. А. Петросян

Одна игра преследования на полуплоскости

(Представлено чл.-корр. АН СССР А. А. Ляпуновым 8/III 1965)

Рассматривается антагонистическая игра преследователя $\bar{P}$ против преследуемого $\bar{E}$. В начальный момент времени игроки $\bar{P}$ и $\bar{E}$ расположены в точках ξ и η полуплоскости S. Затем игроки $\bar{P}$ и $\bar{E}$, обладая постоянными линейными скоростями v и u $(v > u)$, перемещаются в полуплоскости S, имея при этом возможность в каждый момент времени изменять направление своего движения. В каждый момент времени игрок $\bar{P}$ знает расположение преследуемого $\bar{E}$ и направление вектора его скорости в этот момент. Игрок $\bar{E}$ знает только расположение игрока $\bar{P}$ в каждый момент времени. Игрок $\bar{P}$ стремится как можно ближе приблизиться к $\bar{E}$ до пересечения этим последним границы множества S.

Прежде чем дать точное определение игры определим два множества вектор-функций.

Положим $T = [0, \infty]$. Рассмотрим множество вектор-функций

$$\{\psi(x_1, x_2, y_1, y_2, t) = [\psi_1(x_1, x_2, y_1, y_2, t), \psi_2(x_1, x_2, y_1, y_2, t)]\},$$

заданных на $R^4 \times T$ со значениями в R^2, и множество вектор-функций

$$\{\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2, t, \psi) = [\varphi_1(x_1, x_2, y_1, y_2, t, \psi), \varphi_2(x_1, x_2, y_1, y_2, t, \psi)]\},$$

зависящих от $\psi(x, y, t)$ со значениями в R^2 и при фиксированном ψ заданных на $R^4 \times T$. Обозначим через Π и E подмножества множеств $\{\varphi\}$ и $\{\psi\}$, для которых выполнены следующие условия.

1. Для любого $\psi \in E$ найдется такая последовательность

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \infty,$$

что пространство $R^4 \times T$ можно разбить на конечное число областей $R_0, \cdots, R_{n-1}$, каждая из которых представима в виде декартова произведения

$$R_k = R^4 \times (t_k, t_{k+1}) \quad k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

и на каждом из R_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ функция $\psi \in E$ и соответствующая ей $\varphi(\psi) \in \Pi$ непрерывны вместе со своими первыми частными производными.

2. При любых $\varphi \in \Pi$ и $\psi \in E$ система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varphi_i [x_1, x_2, y_1, y_2, t, \psi(x_1, x_2, y_1, y_2, t)], \quad i = 1, 2 \\ \dot{y}_j &= \psi_j(x_1, x_2, y_1, y_2, t), \quad j = 1, 2 \end{aligned} \tag{1}$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях $\xi, \eta \in S$.

3. $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2, \quad \psi_1^2 + \psi_2^2 = u^2,$

где $$v = \text{const}, \ u = \text{const}, \quad v > u.$$

4. Пусть $\{x(t), y(t)\}$ решение системы (1) при начальных условиях $\xi, \eta \in S$ и пусть

$$t_{S_{\overline{E}}} = \inf \{t : y(t) \overline{\in} S\}$$

и

$$t_{S_{\overline{P}}} = \inf \{t : x(t) \overline{\in} S\}.$$

Тогда при $t > t_{S_{\overline{E}}}$ $y(t) \overline{\in} S$ и $x(t) \overline{\in} S$ при $t > t_{S_{\overline{P}}}$.

Для любых $\xi, \eta \in S$ определим дифференциальную игру на выживание, которую условимся обозначать $\overline{\Gamma}(\xi, \eta)$. Множества вектор-функций Π и E, удовлетворяющие условиям 1—4, представляют собой множества чистых стратегий игроков $\overline{\text{P}}$ и $\overline{\text{E}}$ в игре $\overline{\Gamma}(\xi, \eta)$. Каждой ситуации (φ, ψ) при начальных условиях $\xi, \eta \in S$ однозначно соответствуют две траектории $\{x(t), y(t)\}$, являющиеся решением системы (1) и называемые траекториями преследователя $\overline{\text{P}}$ и преследуемого $\overline{\text{E}}$.

Положим

$$t_{\overline{P}} = \min \{t : x(t) = y(t)\}.$$

В любой ситуации величина $t_{\overline{P}}$ однозначно определена и может быть равна некоторому конечному числу или бесконечности.

Пусть

$$\rho = \sqrt{[x_1(t_{S_{\overline{E}}}) - y_1(t_{S_{\overline{E}}})]^2 + [x_2(t_{S_{\overline{E}}}) - y_2(t_{S_{\overline{E}}})]^2}.$$

Пусть $f(\rho)$ некоторая функция, обладающая следующими свойствами: 1. $f(\rho)$ строго монотонно убывает, 2. $0 < f(\rho) < 1$ для всех ρ, 3. $f(\rho)$ непрерывно дифференцируема.

При начальных условиях ξ, η в любой ситуации (φ, ψ) функция выигрыша определяется следующим образом:

$$K(\xi, \eta, \varphi, \psi) = \begin{cases} +1 & t_{\overline{P}} \leqslant t_{S_{\overline{E}}} \\ f(\rho) & t_{S_{\overline{E}}} < t_{\overline{P}} \\ 0 & t_{S_{\overline{E}}} = t_{\overline{P}} = \infty. \end{cases}$$

Поясним теоретико-игровой смысл функции выигрыша в игре $\overline{\Gamma}(\xi, \eta)$. При $t_{\overline{P}} \leqslant t_{S_{\overline{E}}}$ из условия 4 следует, что $\overline{\text{E}}$ ловится в S до достижения им границы S. В этом случае $\bar{P}$ выигрывает $+1$. Если $t_{S_{\bar{E}}} < t_{\bar{P}}$, то $\bar{E}$ оказывается на границе S до его поимки преследователем. В этом случае $\bar{P}$ получает тем больше, чем ближе он расположен к $\bar{E}$ в момент пересечения им границы множества S. Если оба игрока все время остаются в S и поимка не происходит, то выигрыш равен нулю.

В ([1]) найдены оптимальные стратегии игроков в игре $\Gamma(\xi, \eta)$, которая отличается от $\widetilde{\Gamma}(\xi, \eta)$ только тем, что $\bar{P}$ проигрывает 1, если он не осуществляет поимку $\bar{E}$ в S. Очевидно, что для всех $\xi, \eta \in \Phi(S, \gamma)$ (множество тех начальных позиций, из которых $\bar{P}$ может обеспечить поимку $\bar{E}$ в S) значения и решения игр $\Gamma(\xi, \eta)$ и $\widetilde{\Gamma}(\xi, \eta)$ совпадают.

Таким образом, нерешенным остается вопрос о существовании значения $\operatorname{val}\widetilde{\Gamma}(\xi, \eta)$ игры $\widetilde{\Gamma}(\xi, \eta)$ при $\xi, \eta \bar{\in} \Phi(S, \gamma)$.

Из ([1]) следует, что для любого $z \bar{\in} \Phi(S, \gamma)$, $\bar{E}$ обладает стратегией ψ, при которой он избегает поимки в S при любых стратегиях $\varphi \in \Pi$, следовательно, если $z \bar{\in} \Phi(S, \gamma)$, $\bar{P}$ не может рассчитывать на поимку, а только стремится как можно ближе приблизиться к $\bar{E}$. Пусть $T = \dfrac{\rho(\xi, \eta)}{v - u}$. Оказывается, что у $\bar{P}$ существует стратегия φ^T, гарантирующая ему окончание игры за время $\leqslant T$. Аналогичная стратегия существует и у игрока $\bar{E}$. Пусть Π^T и E^T множества таких стратегий. Можно показать, что множество E^T содержит стратегии из E_0 (см. [1]).

Рассмотрим теперь дискретный по E аналог игры $\widetilde{\Gamma}(\xi, \eta)$, с шагом $\delta = \dfrac{T}{2^n}$ и с ограниченным временем, на множествах стратегий $E^T \times \Pi^T$. Так как игра $\widetilde{\Gamma}_\delta(\xi, \eta, T)$ является конечной игрой с полной информацией, то значение в чистых стратегиях для такой игры существует и удовлетворяет функциональному уравнению

$$V_n(x, y, T) = \min_{\psi \in E_n} \max_{\varphi \in \Pi} V_n(x + \delta\varphi, y + \delta\psi, T - \delta).$$

Пусть теперь $\widetilde{\Gamma}_n(\xi, \eta)$ дискретный аналог игры $\widetilde{\Gamma}(\xi, \eta)$ с шагом δ ([2]), но с неограниченным временем. Теоремы существования для бесконечных игр с полной информацией доказать пока не удалось, однако для данной бесконечной игры с полной информацией имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Значение игры $\widetilde{\Gamma}_n(\xi, \eta)$ существует и имеет место равенство*

$$\operatorname{Val}\widetilde{\Gamma}_n(\xi, \eta) = \operatorname{Val}\widetilde{\Gamma}_n(\xi, \eta, T).$$

при этом оптимальные стратегии в игре $\overline{\Gamma}_n(\xi, \eta)$ *принадлежат множествам* Π^T и E^T.

Пусть $V_n(\xi, \eta)$ — значение игры $\overline{\Gamma}_n(\xi, \eta)$, тогда имеет место неравенство

$$V_n(\xi, \eta) \geqslant V_{n-1}(\xi, \eta),$$

так как с увеличением n множества E_n монотонно возрастают. Поскольку последовательность $V_n(\xi, \eta)$ ограничена сверху на множестве $\overline{\Phi}(S, \gamma)$, то существует поточечный предел

$$\lim_{n\to\infty} V_n(\xi, \eta) = V(\xi, \eta), \text{ для всех } \xi, \eta \in \Phi(S, \gamma).$$

Определение. Множество стратегий E называется условно компактным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что множество E_n будет ε-сетью в E в метрике

$$\rho(\psi_1, \psi_2) = \sup_{\varphi} |K(\varphi, \psi_1) - K(\varphi, \psi_2)|.$$

Теорема 2. *Если пространство E условно компактно, то* $V(\xi, \eta)$ *есть значение игры* $\overline{\Gamma}(\xi, \eta)$. Если функция $V(\xi, \eta)$ непрерывно дифференцируема по всем переменным, то, как это следует из ([3]), она должна быть решением задачи Коши для уравнения

$$\frac{V_{\xi_1}^2 + V_{\xi_2}^2}{V_{\eta_1}^2 + V_{\eta_2}^2} = \frac{u}{v},$$

при граничном условии $V|_{\xi_1=0} = f(\rho)$.

Теорема 3. *Если функция* $V(\xi, \eta)$ *непрерывно дифференцируема по всем переменным, то оптимальные стратегии игроков* $\overline{\mathrm{P}}$ *и* $\overline{\mathrm{E}}$ *имеют вид*

$$\varphi_1^* = \frac{v V_{\xi_1}}{\sqrt{V_{\xi_1}^2 + V_{\xi_2}^2}}, \qquad \varphi_2^* = \frac{v V_{\xi_2}}{\sqrt{V_{\xi_1}^2 + V_{\xi_2}^2}}, \tag{2}$$

$$\psi_1^* = \frac{u V_{\eta_1}}{\sqrt{V_{\eta_1}^2 + V_{\eta_2}^2}}, \qquad \psi_2^* = \frac{u V_{\eta_2}}{\sqrt{V_{\eta_1}^2 + V_{\eta_2}^2}}, \tag{3}$$

где в (2) *знак перед корнем берется равным знаку* $V_{\xi_1} \cdot V_{\xi_2}$ *а в* (3) *обратным знаку* $V_{\eta_1} \cdot V_{\eta_2}$.

Из теоремы 3, в частности, следует, что игрок $\overline{\mathrm{P}}$ в оптимальной стратегии не использует информации о ψ в данный момент.

Ленинградский ордена Ленина
государственный университет
им. А. А. Жданова

Լ. Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Հետապնդման մի խաղ հարթության վրա

P և *E* խաղացողները շարժվում են հարթության վրա, հնարավորություն ունենալով յուրաքանչյուր պահին փոխելու իրենց շարժման ուղղությունը։ Հոդվածում դիտարկվում է այն դեպքը, երբ *E* խաղացողի որսումը *S*-ում անհնարին է և *P* խաղացողը ձգտում է մինիմացնել մինչև *E* խաղացողը եղած այն հեռավորությունը, երբ վերջինս հասնում է *S* կիսահարթության սահմանին։ Ցանկացած սկզբնական դիրքերի համար, ապացուցվում է զուտ ստրատեգիաներում խաղի արժեքի գոյությունը և ցույց է տրվում թե որոշ դեպքերում այդ արժեքի որոշումը կարելի է բերել մի մասնավոր տեսքի մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման համար Կոշու խնդրի լուծմանը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. А. Петросян*, ДАН СССР, т. 161, № 1 (1965). [2] *Г. Е. Скарф*. On differential games with survival payoff. Ann. of Math. Stndies, № 39, Princeton, 1957. [3] *Л. А. Петросян*, ДАН АрмССР, т. 40, № 4 (1965).