ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XL 1965 5

МАТЕМАТИКА

Р. А. Александрян

Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговским спектром

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 29/XII 1964)

п. 1. Пусть H сепарабельное гильбертовое пространство, а A действующий в нем самосопряженный оператор с областью определения D_A. Предположим пока, что спектр оператора A простой и чисто непрерывный, тогда, в соответствии с основной теоремой спектральной теории самосопряженных операторов, существуют неубывающая на вещественной оси функция $\rho(\lambda)$ и такое изометрическое отображение V пространства H на гильбертовое пространство L^2_ρ комплексных функций, интегрируемых с квадратом модуля по мере $\rho(\lambda)$, которое „диагонализирует" оператор A в том смысле, что

$$VAV^{-1}=\lambda E,$$

т. е. при этом отображении оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

При этом, если g так называемый порождающий элемент, то имеют место соотношения

$$(f_1, f_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda)\overline{F_2(\lambda)}\,d\rho(\lambda), \qquad f_1, f_2 \in H \tag{1}$$

$$Af=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda F(\lambda)\,dE_\lambda g, \qquad f\in D_A, \tag{2}$$

где E_λ — соответствующее A разложение единицы, $F(\lambda)=Vf$, $\rho(\lambda)=\|E_\lambda g\|^2$.

п. 2. Пусть $\{\Delta\}$ совокупность борелевских подмножеств вещественной оси. Если Δ есть интервал (α, β), то положим $E(\Delta)=E_\beta-E_\alpha$, $\rho(\Delta)=\rho(\beta)-\rho(\alpha)$ и т. д.

Известно, что в случае непрерывного спектра собственные подпространства пустые, т. е. уравнение

$$\mathrm{A}u = \lambda u \tag{3}$$

не имеет отличных от нуля решений, принадлежащих H, и в представлении (2) вместо собственных элементов участвуют элементы $g_\lambda = E_\lambda g$, представляющие собой полную систему так называемых дифференциальных решений, т. е. таких, что для всякого интервала Δ вещественной оси удовлетворяется уравнение

$$A(g_\Delta) = \int_\Delta \alpha\, dg_\alpha \tag{3*}$$

и из $(f, g_\lambda) = 0$, $f \in H$, а λ произвольно вытекает $f = 0$.

Однако очень часто (в особенности при исследовании дифференциальных операторов, действующих в различных функциональных пространствах) оказывается удобнее иметь дело с уравнением (3) при фиксированных значениях параметра λ, т. е. с собственными функциями, понимаемыми в том или ином обобщенном смысле, чем с уравнением (3*) или с дифференциальными решениями.

Вместе с тем, несмотря на максимальную общность и фундаментальную роль, которую играет представление (1), (2) в теории разложения самосопряженных операторов, оно не указывает в явной форме собственных функций, по которым должно производиться спектральное разложение в случае операторов с непрерывным спектром. Поэтому, в частности, спектральная теория дифференциальных операторов продолжает интенсивно разрабатываться ([1–11]) и после установления упомянутого выше фундаментального результата, содержащегося в представлении (1), (2).

п. 3. Проведенное нами исследование спектральных разложений, порожденных простейшими дифференциальными операторами гиперболического типа ([12]), привело нас ([13]) к следующей общей теореме, представляющей собой ту трактовку основной спектральной теоремы, которая соответствует высказанным в п. 2 соображениям.

Теорема 1. *Пусть A произвольный самосопряженный в H оператор с областью определения D_A с простым и чисто непрерывным спектром, тогда существует линейное пространство Ω_A, состоящее из всюду плотного в H множества элементов, принадлежащих D_A, сходимость в котором влечет сходимость в H, и семейство функционалов $T_\lambda \in \Omega_A^*$ со следующими свойствами:*

1°. $A\Omega_A \subset \Omega_A$ (инвариантность)

2°. $T_\lambda(\mathrm{A}\varphi) = \lambda T_\lambda(\varphi)$, $\varphi \in \Omega_A$ (диагональность)

3°. $(f, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \overline{T_\lambda(\varphi)}\, d\rho(\lambda)$, $f \in H$, $\varphi \in \Omega_A$ (формула разложения)

4. $\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |T_\lambda(f)^2|\, d\rho(\lambda)$, $f \in \Omega_A$ (полнота).

Здесь мы не будем приводить доказательства, а укажем лишь, как можно строить пространство Ω_A и семейство функционалов T_λ. Пусть C_0 линейное пространство непрерывных на вещественной оси и финитных (исчезающих вне некоторых компактов) функций, в котором последовательность $F_n(\lambda)$ называется сходящейся к нулю, если $F_n(\lambda)$ исчезают вне фиксированного компакта, на котором они стремятся к нулю равномерно.

Положим $\Omega_A = V^{-1}C_0$, тогда сходимость в пространстве C_0 естественным образом индуцирует в Ω_A соответствующую топологию и превращает Ω_A в линейное пространство. Функционалы T_λ определяются по формуле

$$T_\lambda(\varphi) = \delta_\lambda(V\varphi), \qquad \varphi \in \Omega_A, \tag{4}$$

где δ_λ — функционал Дирака, сосредоточенный в точке λ, тогда утверждения теоремы без труда проверяются. Функционалы T_λ естественно называть собственными функционалами оператора A, тогда содержащаяся в теореме 1 форма основной спектральной теоремы может быть сформулирована следующим образом: любой самосопряженный оператор A с простым и чисто непрерывным спектром обладает полной системой собственных функционалов T_λ, непрерывных в топологии пространства Ω_A, и произвольный функционал, изоморфный элементу из H, допускает разложение в обобщенный интеграл Фурье по этим функционалам по формуле

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\, \overline{T_\lambda(\varphi)}\, d\rho(\lambda), \qquad \varphi \in \Omega_A. \tag{5}$$

Таким образом, как пространство, так и функционалы T_λ строятся посредством изометрических операторов V и V^{-1}, которые при исследовании самосопряженных операторов, разумеется, нельзя предполагать известными. Тем не менее, в тех случаях, когда резольвента R_z оператора A для невещественных z уже построена, то можно указать явное выражение оператора V^{-1} на некотором всюду плотном множестве в L^2_ρ.

В самом деле, пусть $u(\lambda) \in L^2_\rho$ регулярная аналитическая функция на спектре оператора A, а Γ контур на комплексной плоскости, охватывающий весь спектр и лежащий в области регулярности функции $u(\lambda)$, тогда можно доказать, что

$$V^{-1}u(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma u(z)\, R_z g\, dz. \tag{6}$$

Заметим далее, что из сходимости элементов $f_n \in H$ к нулю в метрике H вытекает сходимость почти везде по мере $\rho(\lambda)$ лишь некоторой подпоследовательности Vf_{n_k}, но не обязательно всей последовательности.

Проанализировав сказанное выше, можно убедиться, что топологию в H достаточно усилить лишь настолько, чтобы из сходимости f_n в этой усиленной топологии следовала сходимость Vf_n почти всюду по мере $\rho(\lambda)$. Очевидно, что выбранная в Ω_A топология этому условию удовлетворяет, хотя она в указанном смысле не оптимальна.

п. 4. В этом пункте мы дополнительно предполагаем, что спектр оператора A является лебеговским, т. е. отвечающая ему спектральная плотность $\rho(\lambda)$ абсолютно непрерывна по мере Лебега. Мы укажем конструкцию, которая описывается исключительно в терминах резольвенты и позволяет строить полную систему собственных функционалов. По-видимому, такими же или близкими построениями можно строить собственные функционалы и без упомянутого выше ограничения на спектральную плотность, однако доказывать это мы не умеем.

Лемма. *Пусть A самосопряженный оператор с простым и лебеговским спектром и пусть $M = \{\varphi\}$ некоторая счетная и плотная в H совокупность элементов $\varphi \in D_A$, тогда существует множество точек $\Lambda = \{\lambda\}$ полной ρ-меры, такое, что*

$$V\varphi = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\pi i\rho'(\lambda)}\left(\left(R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}\right) g, \varphi\right) \tag{7}$$

для всех $\varphi \in M$ и $\lambda \in \Lambda$.

В самом деле, пусть $\Phi(\lambda) = V\varphi$, тогда очевидно для всех невещественных $z = \sigma + i\tau$ $(\tau \neq 0)$ будем иметь

$$(R_z g, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\Phi(\lambda)}}{\lambda - z}\, d\rho(\lambda)$$

или в силу абсолютной непрерывности $\rho(\lambda)$

$$\frac{1}{2\pi i}\overline{(R_{\bar z} g, \varphi)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho'(\lambda)\,\Phi(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda. \tag{8}$$

Таким образом, при каждом фиксированном $\varphi \in H$ левая часть в формуле (8) представляет собой регулярную вне вещественной оси аналитическую функцию z, представимую интегралом типа Коши, поэтому на основании известной леммы И. И. Привалова заключаем, что существует совокупность точек Λ_φ полной лебеговской меры такая, что

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{1}{2\pi i}\overline{\left(\left(R_{\sigma+i\tau} - R_{\sigma-i\tau}\right) g, \varphi\right)} = \rho'(\sigma)\,\Phi(\sigma)$$

для всех $\sigma \in \Lambda_\varphi$. Пусть теперь $\Lambda^* = \bigcap \Lambda_\varphi$, где пересечение берется по всем $\varphi \in M$, тогда очевидно Λ^* имеет полную ρ-меру. Очевидно также, что множество точек, в которых $\rho'(\lambda)$ отлично от нуля, также имеет полную ρ-меру, поэтому, обозначив пересечение этого множества с Λ^* через Λ, легко убедимся в справедливости соотношения (7).

Зафиксируем в формуле (7) некоторое $\lambda \in \Lambda$ и пусть φ пробегает совокупность M, которая до сих пор была совершенно произвольной счетной совокупностью из H. При такой интерпретации эта формула определяет семейство дистрибутивных функционалов на M, определенных для всех $\lambda \in \Lambda$ и действующих по формуле $T_\lambda(\varphi) = \Phi(\lambda) = V\varphi$.

Можно доказать, что если $M \subset D_A$, то $T_\lambda(A\varphi) = \lambda T_\lambda(\varphi)$, т. е. определяемые формулой (7) функционалы суть собственные функционалы, хотя они определены лишь на некотором счетном множестве M. Что же касается структуры этих функционалов (мы так называем характер непрерывности функционалов), то этот важный вопрос должен быть отдельно изучен. Но коль скоро выяснено, какая топология обеспечивает непрерывность собственных функционалов, то построенные в лемме функционалы T_λ могут быть продолжены на замыкание M по этой топологии. Сопоставляя сказанное выше с теоремой 1, мы можем сформулировать, в частности, следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть A самосопряженный оператор с простым и лебеговским спектром, тогда полная система его собственных функционалов T_λ может быть построена по формуле*

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \left((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) g, \varphi \right) \qquad (7^*)$$

*для всех $\varphi \in \Omega_A$ и всех λ из некоторого множества полной ρ-меры**.

п. 5. Известная работа И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко [9] сыграла важную роль в дальнейшем развитии теории разложения самосопряженных операторов по обобщенным собственным функциям. В этой работе было установлено, что для произвольных самосопряженных дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами в функциональных гильбертовых пространствах спектральная функция дифференцируема по $\rho(\lambda)$ почти всюду и что получаемые в результате собственные функционалы суть обобщенные функции в смысле Соболева – Шварца.

Таким образом, эта работа содержала первый, практически весьма важный результат о структуре собственных функционалов. В этом пункте мы сформулируем [13] результат, который может дать априорное представление о структуре собственных функционалов произвольных операторов с лебеговским спектром.

Теорема 3. *Пусть A самосопряженный оператор с простым лебеговским спектром и пусть*

$$\sup_{\|\varphi\|_S = 1} |((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) g, \varphi)| < K_\lambda, \qquad \varphi \in S,$$

где постоянная K_λ не зависит от τ, а S некоторое пространство Банаха, состоящее из элементов, принадлежащих D_A с более сильной, чем в H, нормой, тогда существует полная система соб-

---

* В случае, когда $\rho'(\lambda)$ непрерывна, соотношение (7*) имеет место для всех λ.

ственных функционалов T_λ оператора A, принадлежащих сопряженному пространству S^*.

п. 6. Хорошо известно [14], что если спектр оператора A не простой, то пространство может быть представлено в виде ортогональной суммы так называемых циклических подпространств, в каждом из которых спектр оператора A простой.

Таким образом, указанные выше утверждения справедливы и тогда, когда спектр не обязательно простой. В частности, содержащаяся в теореме 1 форма основной спектральной теоремы очевидно справедлива без каких-либо ограничений на спектральное семейство или структуру гильбертового пространства, а формула (5) примет при этом вид

$$(f, \varphi) = \sum_{(k)} (f, \omega_k) \overline{(\varphi, \omega_k)} + \sum_{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(\lambda)}^{(k)} \overline{T_\lambda^{(k)}(\varphi)} \, d\rho_k(\lambda), \tag{5*}$$

где ω_k — ортонормированная система собственных элементов, соответствующих чисто точечной части спектра.

п. 7. При изучении конкретных самосопряженных операторов иногда удается построить некоторую совокупность собственных функционалов, однако исследование вопроса о том, полна ли эта совокупность или нет, часто оказывается очень трудной задачей. Описанный выше подход к спектральным разложениям позволяет редуцировать задачу исследования полноты заданной совокупности собственных функционалов к значительно более простой задаче, отысканию всех обобщенных решений (собственных функционалов) уравнения (3) при отдельных фиксированных значениях параметра λ. Разумеется такой подход законен лишь в тех случаях, когда á priori известно, что существует полная система собственных функционалов, непрерывных в некоторой топологии, и поэтому ясно, что при исследовании уравнения (3) можно ограничиваться функционалами соответствующей структуры.

Таким образом, заранее зная, среди функционалов какой структуры имеется полная система, можно, вместо доказательства полноты заданной совокупности собственных функционалов, доказать, что уравнение (3) при каждом фиксированном значении λ не имеет среди функционалов такой структуры других решений, кроме заданных.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ

Լեբեգյան սպեկտրով ինքնահամալուծ օպերատորների սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ սիստեմի կառուցման մի եղանակի մասին

Դիցուք A-ն կամայական ինքնահամալուծ օպերատոր է H հիլբերտյան տարածության մեջ D_A որոշման տիրույթով, որի սպեկտրը պարզ է և անընդհատ։ Ապացուցված է, որ ամեն մի այդպիսի օպերատորին համապատասխան գոյություն ունի D_A-ին պատկանող էլեմենտներից բաղկացած գծային տարածություն Ω_A, որի զուգամիտությունն ավելի ուժեղ է, քան H-ում եղածը, և այդ տարածության համալրած տարածությանը պատկանող T_λ ֆունկցիոնալների ընտանիք, որ տեղի ունեն 1°—4° հատկությունները։

Այլ կերպ ասած. ամեն մի այդպիսի օպերատոր ունի այսպես կոչված սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ սիստեմ (որոնք չեն պատկանում H տարածությանը), սակայն H-ին պատկանող ամեն մի էլեմենտ թույլ է տալիս սպեկտրալ վերածում ըստ այդ T_λ սեփական ֆունկցիոնալների (5) բանաձևի իմաստով։

Այն դեպքում, երբ A օպերատորի սպեկտրը լեբեգյան է (այսինքն $\rho(\lambda)$ սպեկտրալ խտությունը բացարձակ անընդհատ է ըստ Լեբեգի), նշված է մի ընդհանուր եղանակ, որը թույլ է տալիս կառուցել օպերատորի սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ սիստեմը, երբ կառուցված է օպերատորի ռեզոլվենտը պարամետրի ոչ իրական արժեքների համար (նայիր (7*) բանաձևը)։ Այնուհետև ձևակերպված է վերջին թեորեմը, որն առանձին դեպքերում թույլ է տալիս նախապես իմանալ նշված եղանակով կառուցված սեփական ֆունկցիոնալների անընդհատության բնույթը։ Բերված արդյունքները կարող են կիրառվել նաև այն դեպքում, երբ հետազոտվում է զանազան կոնկրետ ինքնահամալուծ օպերատորների ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների տրված սիստեմների լրիվությունը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Вейль*, Math. Annal., 68, 1910. [2] *Е. Титчмарш*. Canad. Jour., 1, № 2, 1946. [3] *М. Г. Крейн*, Труды Ин-та математики АН УССР, № 10 (1948). [4] *Б. М. Левитан*, Разложение по собственным функциям, М.—Л., 1950. [5] *Т. Карлеман*. Arciv. Math. Astr. Fys. 24, № 11, 1934. [6] *А. Я. Повзнр*, Матем. сб. 32 (74), (1953). [7] *Ф. Маутнер*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39, № 1, 1953. [8] *Л. Гординг*, XII Kongress Math. Skand., Lund, 1953. [9] *И. М. Гельфанд* и *А. Г. Костюченко*, ДАН, т. 103, № 3 (1955). [10] *Ю. М. Березанский*, ДАН, т. 108, № 3 (1956). [11] *Г. И. Кац*, ДАН СССР, 119, № 1 (1958). [12] *Р. А. Александрян*, Труды Московского математ. общества, т. 9 (1960). [13] *Р. А. Александрян*, Докторская диссертация. МГУ, 1962. [14] *А. И. Плеснер*, УМН, вып. 9, 1941.