ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XL 1965 4

МАТЕМАТИКА

Л. А. Петросян

О сведении решения одной игры преследования на выживание к решению задачи Коши для уравнения в частных производных первого порядка

(Представлено чл.-корр. АН СССР А. А. Ляпуновым 8/III 1965)

Положим $T = [0, \infty)$. Рассмотрим множество вектор-функций

$$\{\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = [\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, t), \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, t)]\},$$

заданных на R^4xT и со значениями в R^2, и множество вектор-функций

$$\{\psi(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = [\psi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, t), \psi_2(x_1, x_2, x_2, x_4, t)]\},$$

заданных на R^4xT и со значениями в R^2, удовлетворяющие следующим условиям.

1. Для любого $\psi \in \{\psi\}$ и $\varphi \in \{\varphi\}$ система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4, t), \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4, t), \\ \dot{x}_3 &= \varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_4, t), \\ \dot{x}_4 &= \varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4, t) \end{aligned} \tag{1}$$

имеет единственное решение при любых начальных условиях

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \text{ и } \eta = (\eta_1, \eta_2).$$

2. $\varphi_1^2(x_1, x_2, x_3, x_4, t) + \varphi_2^2(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = v^2(x_1, x_2)$

$$\psi_1^2(x_1, x_2, x_3, x_4, t) + \psi_2^2(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = u^2(x_3, x_4,),$$

где $v(x_1, x_2)$ и $u(x_3, x_4)$ некоторые заданные строго положительные функции. Множества $\{\psi\}$ и $\{\varphi\}$, удовлетворяющие 1—2, мы будем обозначать через E и Π соответственно.

Для любых ξ, η определим дифференциальную игру на выживание в нормальной форме, которую условимся обозначать $G(\xi, \eta)$.

Игра $G(\xi, \eta)$ представляет собой антагонистическую игру двух лиц $\overline{\text{P}}$ и $\overline{\text{E}}$. Множества вектор-функций Π и E представляют собой множества стратегий игроков $\overline{\text{P}}$ и $\overline{\text{E}}$.

Каждой ситуации (φ, ψ) при начальных условиях ξ, η однозначно соответствует некоторое решение уравнений (1), называемое партией игры, которую мы будем обозначать $x(t)$.

В R^4 задано некоторое 3-мерное многообразие M

$$x_1(t_1, t_2, t_3),\ x_2(t_1, t_2, t_3),\ x_3(t_1, t_2, t_3),\ x_4(t_1, t_2, t_3).$$

На нем задана некоторая достаточно гладкая ограниченная снизу вещественная функция $b(x)$.

Функция выигрыша в каждой ситуации (φ, ψ) определяется следующим образом. Пусть $x(t)$ партия в ситуации (φ, ψ) и пусть

$$t_0 = \inf\{t : x(t) \in M\} \text{ и } t_0 < \infty,$$

тогда $K(\xi, \eta, \varphi, \psi) = b(x(t_0))$. Если же не существует такой точки t, что $x(t) \in M$ в ситуации (φ, ψ), то

$$K(\xi, \eta, \varphi, \psi) = a, \text{ где } a < \inf_{x \in M} b(x).$$

Игры такого типа без ограничения 2 на множества стратегий игроков впервые рассматривались Скарфом в ([1]).

Допустим, что для любой начальной позиции x существует значение игры в чистых стратегиях, и оно является непрерывно дифференцируемой функцией начальной позиции.

Лемма 1. *Если в игре $G(\xi, \eta)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях и функция $V(x)$, представляющая собой значение игры на выживание с начальной позиции x, непрерывно дифференцируема, то она удовлетворяет экстремально-дифференциальному уравнению*

$$\max_{\varphi_1\varphi_2} \min_{\psi_1\psi_2} \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\varphi_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\varphi_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\psi_1 + \frac{\partial V}{\partial x_4}\psi_2\right] = 0, \tag{2}$$

при граничном условии

$$V(x) = b(x), \text{ для } x \in M.$$

Используя (2) и условие 2 на стратегии можно, пользуясь правилом неопределенных множителей, свести наше экстремально-дифференциальное уравнение к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка.

Для нахождения

$$\max_{\varphi_1\varphi_2} \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\varphi_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\varphi_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3}\psi_1^* + \frac{\partial V}{\partial x_4}\psi_2^*\right]$$

при условии

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 = v^2(x_1, x_2)$$

и

$$\min_{\psi_1\psi_2} \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}\varphi_1^* + \frac{\partial V}{\partial x_2}\varphi_2^* + \frac{\partial V}{\partial x_3}\psi_1 + \frac{\partial V}{\partial x_4}\psi_2\right]$$

при условии

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 = u^2 (x_3, x_4),$$

пользуемся правилом неопределенных множителей Лагранжа, согласно которому экстремальная точка должна удовлетворять системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x_1} + \lambda_P 2\varphi_1^* = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_3} + \lambda_E 2\psi_1^* = 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial x_2} + \lambda_P 2\varphi_2^* = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_4} + \lambda_E 2\psi_2^* = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Откуда, исключая $\lambda_P, \lambda_E, \varphi_2^*, \psi_2^*$, получаем

$$\varphi_1^* \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_2} \Big/ \frac{\partial V}{\partial x_1} \right] + \\ + \psi_1^* \left[\frac{\partial V}{\partial x_3} + \frac{\partial V}{\partial x_4} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_4} \Big/ \frac{\partial V}{\partial x_3} \right] = 0.$$

Из 2 немедленно получаем и выражеиия для оптимальных стратегий

$$\begin{aligned} \varphi_1^* &= v (x_1, x_2) \cdot \frac{\partial V}{\partial x_1} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2}, \\ \psi_1^* &= u (x_3, x_4) \cdot \frac{\partial V}{\partial x_3} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

При этом для φ_1^* знак корня берется равным знаку $\frac{\partial V}{\partial x_1}$, а для ψ_1^* знак корня берется противоположным знаку $\frac{\partial V}{\partial x_3}$.

Если $\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_3} \neq 0$, то

получаем

$$\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2} = \frac{u^2 (x_3, x_4)}{v^2 (x_1, x_2)}. \tag{5}$$

Таким образом мы получили, что функция значения игры $V(x)$ должна быть решением задачи Коши для уравнения (5) при граничном условии $V(x)\big|_M = b(x)$.

Если интерпретировать u и v как скорости игроков $\overline{E}$ и $\overline{P}$, то полученное уравнение имеет интересный теоретико-игровой смысл.

„Чем больше скорость игрока, тем менее подвержена изменению функция выигрыша при отклонении им от оптимальной стратегии".

Можно показать, что наличие решения задачи Коши для уравнения (5) является достаточным условием существования непрерывно дифференцируемого значения игры. Это дает нам следующую характеристическую теорему.

Теорема. *Для того, чтобы игра $G(\xi, \eta)$ имела бы непрерывно дифференцируемое значение в чистых стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы задача Коши для уравнения*

$$\frac{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_2}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial V}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_4}\right)^2} = \frac{u^2(x_3, x_4)}{v^2(x_1, x_2)}$$

при граничном условии

$$V(x) = b(x) \text{ для } x \in M$$

имела бы решение.

Решение задачи Коши для общего квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка может быть найдено методом Коши [2]. Там же даны некоторые условия на многообразие M и функции $v(x)$, $u(x)$, $b(x)$, при которых это решение существует. Однако во многих конкретных задачах преследования на выживание существование и непрерывная дифференцируемость функции значения игры следуют из теоретико-игровых соображений. Тогда, по теореме, решение задачи Коши для уравнения (5) существует, и оно используется для нахождения значения игры $V(x)$ и оптимальных стратегий для игроков $\overline{P}$ и $\overline{E}$.

Ленинградский ордена Ленина
государственный университет
им. А. А. Жданова

Լ. Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Հետապնդման մի խաղի խնդիրը Կոշու խնդրին բերելու մասին

Դիտարկվում է դիֆերենցիալ անտագոնիստիկ հետապնդման խաղ հարթության վրա: $\overline{P}$ և $\overline{E}$ խաղացողները շարժվում են հարթության վրա հնարավորություն ունենալով յուրաքանչյուր պահին փոխել իրենց շարժման ուղղությունը: Չորս չափանի տարածության մեջ տրված է մի երեք չափանի մի բազմաձևություն, որի վրա որոշված է մի իրական $b(x)$ ֆունկցիա: Հենց որ խաղացողները գրավում են M բազմության պատկանող մի x կետը, խաղը ավարտվում է և $\overline{E}$ խաղացողը վճարում է $\overline{P}$ խաղացողին $b(x)$ գումարը: Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ զուտ ստրատեգիաներում խաղի արժեքի գոյությունը համարժեք է մի մասնակի ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարման Կոշու խնդրի լուծման գոյությանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. Е. Скарф*, On differential games with survival payoff. Ann. of Math. Studies, № 39, Princeton, 1957. [2] *Р. Курант*, Уравнения с частными производными, М., 1964.