ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XL 1965 3

ФИЗИКА

Ю. М. Айвазян

О дифракции поля произвольно движущейся частицы на полуплоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 28/X 1964)

Точно решена задача дифракции поля заряженной частицы, движущейся в пространстве по закону $\vec r = \vec r(t)$ в декартовой системе координат (x, y, z), на бесконечно проводящей полуплоскости.

Заряд частицы предполагается равным e. Координаты полуплоскости задаются соотношениями $-\infty < x < 0$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$. Частица движется по закону $\vec r = \vec r(t)$. Скорость ее в момент времени t равна $\vec v(t)$.

Поле такой частицы в вакууме, как известно, состоит из двух частей — поля, движущегося вместе с нею, и поля излучения. Эти части поля дифрагируют на полуплоскости, давая дифракционное излучение.

Будем искать компоненты электрических полей E_x и E_z в виде $E_{x,z} = E^0_{x,z} + \tilde E_{x,z}$, где $\vec E^0$ есть электрическое поле заряженной частицы, движущейся в пустоте по закону $\vec r = \vec r(t)$. Поле $\tilde E$ вводится для того, чтобы удовлетворить граничным условиям, которые требуют обращения в нуль компонент E_x и E_z полного электрического поля на полуплоскости.

Нулевое поле задачи имеет следующий вид:

$$\vec E^0 = \frac{ei}{2\pi^2 c}\int \frac{k\vec S^{\omega}(\vec\varkappa) + cf^{\omega}(\vec\varkappa)\vec\varkappa}{\varkappa^2 - k^2}\, e^{-i\vec\varkappa\vec r - i\omega t}\, d\vec\varkappa\, d\omega, \tag{1}$$

где $\vec\varkappa = (\varkappa_x, \varkappa_y, \varkappa_z)$, $k = \frac{\omega}{c}$, а

$$\vec S^{\omega}(\vec\varkappa) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \vec v(t)\, e^{i\vec\varkappa\vec r(t) + i\omega t}\, dt, \tag{2}$$

$$f^{\omega}(\vec{\varkappa}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{\varkappa}\vec{r}(t)+i\omega t}\,dt. \tag{3}$$

Таким образом, мы ввели функции $\vec{S}^{\omega}(\vec{\varkappa})$ и $f^{\omega}(\vec{\varkappa})$, которые определяются видом движения частицы. В силу уравнения непрерывности они не являются независимыми и связаны между собой соотношением $\vec{\varkappa}\cdot\vec{S}^{\omega}(\vec{\varkappa}) = \omega f^{\omega}(\vec{\varkappa})$, так что для определения всех компонент нулевых полей достаточно знать только три из этих функций.

Компоненты $\bar{E}_x$ и $\bar{E}_z$ добавочного электрического поля будем искать в виде

$$\bar{E}_{x,z} = \int A_{x,z}\, e^{-i\varkappa_z z - i\alpha x \mp \lambda y - i\omega t}\, d\varkappa_z d\alpha d\omega, \tag{4}$$

где $\lambda^2 = \alpha^2 - p^2$, $p^2 = k^2 - \varkappa_z^2$, $k = \frac{\omega}{c}$, $Im k = \delta > 0$, $Re\lambda > 0$, при $|Im\alpha < < Im k$. Верхний знак в (4) при таком выборе ветви λ соответствует значениям $y > 0$, а нижний знак значениям $y < 0$. При $y = 0$ значения $\bar{E}_{x,z}$ сверху и снизу от полуплоскости совпадают.

Введем также следующие обозначения

$$\bar{E}_{x,z} = \int \varepsilon_{x,z}(\alpha, y)\, e^{-i\varkappa_z z - i\alpha x - i\omega t}\, d\varkappa_z d\alpha d\omega. \tag{5}$$

Из (4) и (5) при $y = 0$ имеем

$$\varepsilon^{+}_{x,z}(\alpha, 0) + \varepsilon^{-}_{x,z}(\alpha, 0) = A_{x,z}, \tag{6}$$

где введены обозначения

$$\varepsilon^{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \varepsilon(\pm x)\, e^{\pm i\alpha x}\, dx. \tag{7}$$

$\varepsilon^{+}(\alpha)$ голоморфна в верхней полуплоскости комплексного переменного α, а $\varepsilon^{-}(\alpha)$ в нижней.

Если $\varepsilon^{-}_{x,z}(\alpha, y)$ непрерывна по y при $y = 0$, то $\varepsilon'^{-}_{x,z}(\alpha, y) = \frac{\partial \varepsilon^{-}_{x,z}(\alpha, y)}{\partial y}$ имеет при $y = 0$ скочок, который физически обусловлен наличием на полуплоскости наведенных зарядов и токов. $\varepsilon'^{+}_{x,z}(\alpha, y)$ при $y = 0$ непрерывна.

Дифференцируя по y (4) и (5), вычитая выражения, которые мы имеем при $y < 0$ из выражений при $y > 0$ и учитывая вышесказанное относительно непрерывности функций $\varepsilon^{-}_{x,z}(\alpha, y)$, будем иметь следующие соотношения:

$$P'^{-}_{x,z} \equiv \varepsilon'^{-}_{x,z}(\alpha, +0) - \varepsilon'^{-}_{x,z}(\alpha, -0) = -2\lambda A_{x,z}, \tag{8}$$

где нами введены новые неизвестные функции $P'^{-}_{x,z}$, а под ± 0 понимаем пределы соответственно справа и слева при $y = 0$.

Функции $\varepsilon^{-}_{x,z}(\alpha, 0)$ можно найти из сформулированных выше граничных условий с помощью (7) и (1)

$$\varepsilon^{-}_{x,z}(\alpha, 0) = \int \frac{\xi_{x,z}(\varkappa_x, \varkappa_z)}{\alpha - \varkappa_x} d\varkappa_x, \tag{9}$$

где

$$\xi_{x,z}(\varkappa_x, \varkappa_z) = -\frac{1}{4\pi^3 c} \int \frac{kS^{0}_{x,z}(\vec{\varkappa}) + cf^{0}(\vec{\varkappa})\varkappa_{x,z}}{\vec{\varkappa}^2 - k^2} d\varkappa_y. \tag{10}$$

Отметим, что при интегрировании по $\varkappa_x$ в (9) и ниже полюс $\varkappa_x = \alpha$ следует считать лежащим в нижней полуплоскости комплексного $\varkappa_x$.

Учитывая (9), исключая $A_{x,z}$ из (6) и (8) и совершая некоторые тождественные преобразования, получаем следующие уравнения:

$$\sqrt{\alpha + p}\,\varepsilon^{+}_{x,z}(\alpha, 0) + \int \frac{\xi_{x,z}(\varkappa_x, \varkappa_z)}{\alpha - \varkappa_x}\left(\sqrt{\alpha + p} - \sqrt{\varkappa_x + p}\right) d\varkappa_x =$$

$$= -\frac{P'^{-}_{x,z}}{2\sqrt{\alpha - p}} - \int \frac{\xi_{x,z}(\varkappa_x, \varkappa_z)}{\alpha - \varkappa_x}\sqrt{\varkappa_x + p}\, d\varkappa_x. \tag{11}$$

Правая часть (11) регулярна в нижней полуплоскости комплексного переменного α, а левая часть в верхней, причем эти области регулярности пересекаются. Таким образом, совершая в (11) аналитическое продолжение и применяя теорему Лиувилля, получим

$$P'^{-}_{z} = -2\sqrt{\alpha - p}\int \frac{\xi_z(\varkappa_x, \varkappa_z)}{\alpha - \varkappa_x}\sqrt{\varkappa_x + p}\, d\varkappa_x, \tag{12}$$

$$P'^{-}_{x} = -2\sqrt{\alpha - p}\int \frac{\xi_x(\varkappa_x, \varkappa_z)}{\alpha - \varkappa_x}\sqrt{\varkappa_x + p}\, d\varkappa_x + 2C\sqrt{\alpha - p}, \tag{13}$$

где C—функция, которая не зависит от α. C вводится для того, чтобы удовлетворить условиям на ребре ([1,2]). Таким образом, выделяется правильное физическое решение. C определяется из условия обращения в нуль $\Delta\bar{E}_y$, то есть обращения скачка компоненты поля $\bar{E}_y$ в нуль на продолжении полуплоскости, что физически означает отсутствие зарядов на продолжении полуплоскости. Этот скачок равен

$$\Delta\bar{E}_y = -2i\int \frac{\alpha A_x + \varkappa_z A_z}{\lambda} e^{-i\varkappa_z z - i\alpha x - i\omega t} d\varkappa_z d\alpha d\omega, \tag{14}$$

где $A_{x,z}$ выражается через $P'^{-}_{x,z}$ по формулам (8). При этом в (14) подынтегральное выражение не имеет точки ветвления в нижней полуплоскости комплексного переменного α.

Замыкая путь интегрирования по α в нижней полуплоскости, вычисляя вычет в полюсе $\alpha = -p$ и приравнивая $\Delta \bar{E}_y$ к нулю, получаем для C следующее выражение:

$$C = -\int \frac{p\xi_x(\varkappa_x, \varkappa_z) - \varkappa_z \xi_z(\varkappa_x, \varkappa_z)}{p\sqrt{\varkappa_x + p}}\, d\varkappa_x. \tag{15}$$

Приведем теперь выражения для A_x и A_z с учетом (15)

$$A_z = \frac{1}{\sqrt{\alpha + p}} \int \frac{\xi_z(\varkappa_x, \varkappa_z)}{\alpha - \varkappa_x} \sqrt{\varkappa_x + p}\, d\varkappa_x. \tag{16}$$

$$A_x = \frac{1}{\sqrt{\alpha + p}} \int \left\{ \frac{\xi_x(\varkappa_x, \varkappa_z)}{\alpha - \varkappa_x} \sqrt{\varkappa_x + p} + \frac{p\xi_x(\varkappa_x, \varkappa_z) - \varkappa_z \xi_z(\varkappa_x, \varkappa_z)}{p\sqrt{\varkappa_x + p}} \right\} d\varkappa_x. \tag{17}$$

Поля $\bar{E}_x$ и $\bar{E}_z$ выражаются через полученные нами A_x и A_z по формулам (4). Компонента поля $\bar{E}_y$ определяется через A_x и A_z следующим образом:

$$\bar{E}_y = \mp i \int \frac{\alpha A_x + \varkappa_z A_z}{\lambda} e^{-i\varkappa_z z - i\alpha x \mp \lambda y - i\omega t}\, d\varkappa_z d\alpha d\omega. \tag{18}$$

Отметим, что при интегрировании по α необходимо считать, что полюс $\alpha = \varkappa_x$ лежит выше вещественной оси.

Напомним, что функции ξ_x и ξ_z выражаются через функции $\vec{S}^{\omega}(\vec{\varkappa})$ и $f^{\omega}(\varkappa)$, которые характеризуют движение частицы, по формулам (9).

Յու. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

Կամայական ձևով շարժվող մասնիկի դաշտի դիֆրակցիան կիսահարթության վրա

Տվյալ աշխատանքում ստացված է e լիցք ունեցող մասնիկի դաշտի դիֆրակցիայի խնդրի լուծումը, երբ այդ մասնիկը շարժվում է $\vec{r} = \vec{r}(t)$ օրենքով իդեալական հաղորդիչ կիսաանվերջ հարթության մոտով, որի դիրքը որոշվում է հետևյալ անհավասարություններով $-\infty < x < 0$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *Ю. М. Айвазян, Д. М. Седракян.* „ДАН АрмССР", XXXIX, № 2 (1964).
2 *Ю. М. Айвазян,* „ДАН АрмССР", XXXIX, № 5 (1964).