ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XL 1965 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. М. Саакян

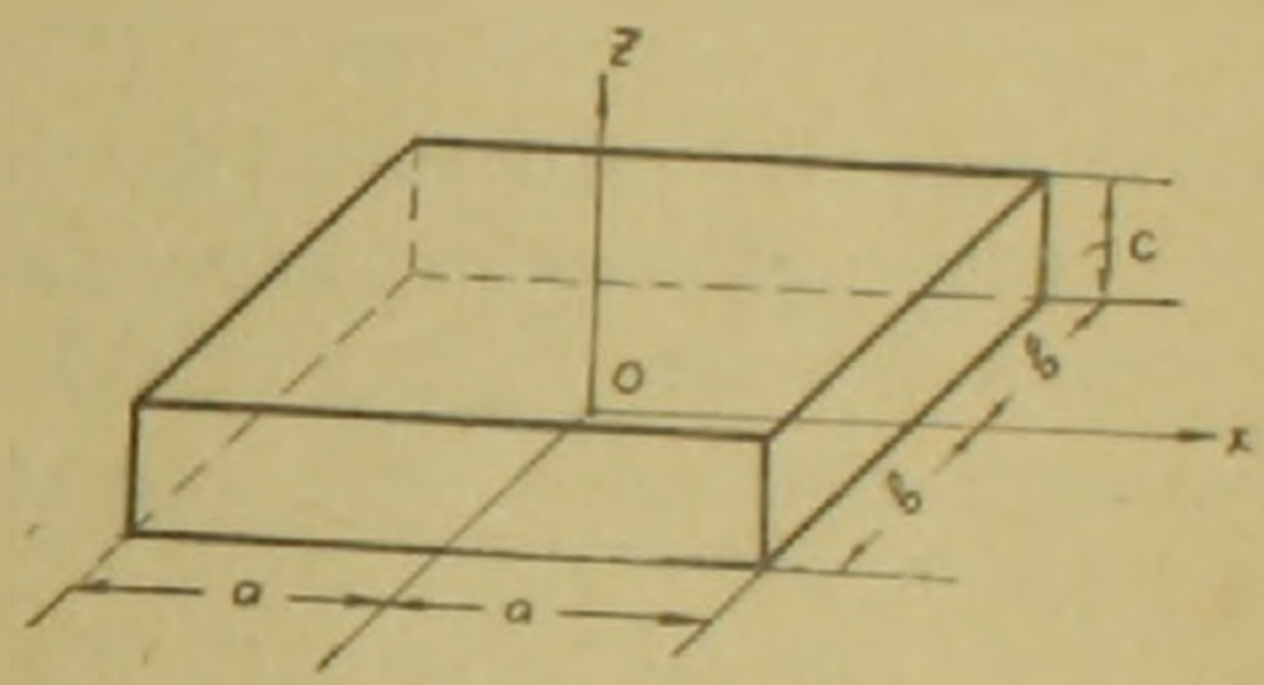
Изгиб прямоугольной толстой плиты с заделанными краями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 5/XI 1964)

В статье дается точное решение задачи изгиба и растяжения прямоугольной толстой плиты с четырьмя заделанными кромками ($x = \pm a$, $y = \pm b$), когда действующая внешняя нагрузка приложена на плоскости ($z = c$) и распределена симметрично относительно координатных осей x и y (фиг. 1).

В силу симметрии задачу можно решать для четверти плиты ($x, y > 0$), требуя при этом, чтобы на плоскостях симметрии $x = 0$, $y = 0$; удовлетворялись условия симметрии:

$$x = 0: \quad u = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0;$$
$$y = 0: \quad v = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0, \tag{1}$$



Фиг. 1.

На кромках $x = a$ и $y = b$ и на торцах $z = 0$ и $z = c$ выполняются следующие условия:

$$x = a: \quad u = v = w = 0; \qquad y = b: \quad u = v = w = 0;$$
$$z = 0: \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0; \qquad z = c: \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \tag{2}$$
$$\sigma_z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условиям:

$$f(x, y) = f(-x, y); \qquad f(x, y) = f(x, -y).$$

При решении задачи пользуемся уравнениями равновесия в перемещениях

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0; \qquad \mu\nabla^2 v + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0;$$
$$\mu\nabla^2 w + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

где

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Решение системы (3) ищем в виде сумм двойных рядов Фурье

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(1)}(x)\cos\beta_m y\cos\gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{ln}^{(1)}(y)\sin\alpha_l x\cos\gamma_n z +$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{lm}^{(1)}(z)\sin\alpha_l x\cos\beta_m y;$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}^{(2)}(x)\sin\beta_m y\cos\gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_{ln}^{(2)}(y)\cos\alpha_l x\cos\gamma_n z +$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{lm}^{(2)}(z)\cos\alpha_l x\sin\beta_m y;$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{(3)}(x)\cos\beta_m y\sin\gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{ln}^{(3)}(y)\cos\alpha_l x\sin\gamma_n z +$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\psi_{lm}^{(3)}(z)\cos\alpha_l x\cos\beta_m y, \tag{4}$$

где

$$\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2a}, \qquad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2b}; \qquad \gamma_n = \frac{n\pi}{c}.$$

Подставив (4) в (3) получим три системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в каждой из которых входят по три неизвестных функции $f_{mn}^{(i)}(x)$, $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$; $\psi_{lm}^{(i)}(z)$; $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Для рассматриваемой задачи решения указанных систем уравнений представляем в виде:

$$f_{mn}^{(1)}(x) = A_{mn}^{(1)}\operatorname{sh}k_{mn}x + D_{mn}^{(1)}xk_{mn}\operatorname{ch}k_{mn}x;$$

$$f_{mn}^{(i)}(x) = B_{mn}^{(i)}\operatorname{ch}k_{mn}x + C_{mn}^{(i)}k_{mn}x\operatorname{sh}k_{mn}x; \quad (i = 2,\ 3)$$

$$\varphi_{ln}^{(2)}(y) = M_{ln}^{(2)}\operatorname{sh}k_{ln}y + F_{ln}^{(2)}k_{ln}y\operatorname{ch}k_{ln}y; \tag{5}$$

$$\varphi_{ln}^{(i)}(y) = N_{ln}^{(i)}\operatorname{ch}k_{ln}y + E_{ln}^{(i)}k_{ln}y\operatorname{sh}k_{ln}y; \quad (i = 1,\ 3)$$

$$\psi_{lm}^{(i)}(z) = K_{lm}^{(i)}\operatorname{sh}k_{lm}z + L_{lm}^{(i)}\operatorname{ch}k_{lm}z + H_{lm}^{(i)}k_{lm}z\operatorname{sh}k_{lm}z +$$

$$+G_{lm}^{(i)}k_{lm}z\operatorname{ch}k_{lm}z; \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где $A_{mn}^{(1)}\cdots G_{lm}^{(3)}$ постоянные интегрирования, которые связаны следующими соотношениями:

$$k_{mn}A_{mn}^{(1)} + k_{mn}(2\eta+1)D_{mn}^{(1)} + \beta_m B_{mn}^{(2)} + \gamma_n B_{mn}^{(3)} = 0;$$

$$\beta_m C_{mn}^{(3)} - \gamma_n C_{mn}^{(2)} = 0; \qquad k_{mn}C_{mn}^{(2)} + \beta_m D_{mn}^{(1)} = 0;$$

$$k_{ln}M_{ln}^{(2)} + k_{ln}(2\eta+1)F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} = 0; \tag{3}$$

$$\gamma_n E_{ln}^{(1)} - \alpha_l E_{ln}^{(3)} = 0; \qquad \gamma_n F_{ln}^{(2)} + k_{ln}E_{ln}^{(3)} = 0;$$

$$k_{lm} K_{lm}^{(3)} + k_{lm}(2\eta+1) G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m K_{lm}^{(2)} = 0; \qquad (6)$$

$$k_{lm} L_{lm}^{(3)} + k_{lm}(2\eta+1) H_{lm}^{(3)} + \alpha_l K_{lm}^{(1)} + \beta_m K_{lm}^{(2)} = 0;$$

$$\alpha_l H_{lm}^{(2)} - \beta_m H_{lm}^{(1)} = 0; \qquad \alpha_l G_{lm}^{(3)} + k_{lm} H_{lm}^{(1)} = 0;$$

$$\alpha_l G_{lm}^{(2)} - \beta_m G_{lm}^{(1)} = 0; \qquad \beta_m H_{lm}^{(3)} + k_{lm} G_{lm}^{(2)} = 0.$$

Здесь

$$\eta = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \quad k_{lm} = \sqrt{\alpha_l^2 + \beta_m^2}; \quad k_{mn} = \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}; \quad k_{ln} = \sqrt{\alpha_l^2 + \gamma_n^2}.$$

Пользуясь обобщенными законами Гука и выражениями (4) для перемещения, получим решения для напряжений, выраженные через функции $f_{mn}^{(i)}(x)$, $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$, $\psi_{lm}^{(i)}(z)$ $(i=1, 2, 3)$. Удовлетворив граничным условиям (2), получим ряд соотношений между коэффициентами интегрирования $A_{mn}^{(1)} \cdots G_{lm}^{(3)}$. Разрешая эти соотношения вместе с (6) относительно неизвестных постоянных, для последних получим следующие выражения:

$$D_{mn}^{(1)} = \frac{a}{c} \cdot \frac{Y_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a}; \qquad F_{ln}^{(2)} = \frac{b}{c} \cdot \frac{Z_{nl}}{\alpha_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b};$$

$$H_{lm}^{(3)} = \frac{X_{lm}^{(2)} - X_{lm}^{(1)}}{2\alpha_l \beta_m}; \qquad G_{lm}^{(3)} = \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2\alpha_l \beta_m \operatorname{sh} k_{lm} c};$$

$$C_{mn}^{(2)} = -\frac{a}{c \cdot k_{mn}^2} \cdot \frac{Y_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a}; \qquad C_{mn}^{(3)} = -\frac{a\gamma_n}{c\beta_m k_{mn}^2} \cdot \frac{Y_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a};$$

$$B_{mn}^{(2)} = \frac{a^2}{ck_{mn}} \cdot \frac{Y_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}; \qquad B_{mn}^{(3)} = \frac{a^2\gamma_n}{ck_{mn}\beta_m} \cdot \frac{Y_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a};$$

$$A_{mn}^{(1)} = -\frac{a}{c} \cdot \frac{(1 + 2\eta + ak_{mn} \operatorname{th} k_{mn} a) Y_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a};$$

$$L_{lm}^{(3)} = -(\eta+1)\frac{X_{lm}^{(2)} - X_{lm}^{(1)}}{2\alpha_l \beta_m}; \qquad (7)$$

$$E_{ln}^{(3)} = -\frac{b\gamma_n}{c\alpha_l k_{ln}^2} \cdot \frac{Z_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b}; \qquad E_{ln}^{(1)} = -\frac{b}{ck_{ln}^2} \cdot \frac{Z_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b};$$

$$N_{ln}^{(1)} = \frac{b^2}{ck_{ln}} \cdot \frac{Z_{ln} \operatorname{sh} k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b}; \qquad N_{ln}^{(3)} = \frac{b^2\gamma_n}{c\alpha_l k_{ln}} \cdot \frac{Z_{ln} \operatorname{sh} k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b};$$

$$M_{ln}^{(2)} = -\frac{b}{c} \cdot \frac{(1 + 2\eta + bk_{ln} \operatorname{th} k_{ln} b) Z_{ln}}{\alpha_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b};$$

$$H_{lm}^{(1)} = \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2\beta_m k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c};$$

$$H_{lm}^{(2)} = -\frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2\alpha_l k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c}; \qquad G_{lm}^{(1)} = \eta\frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\beta_m k_{lm}};$$

$$K_{lm}^{(2)} = -\eta \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\alpha_l k_{lm}}; \quad G_{lm}^{(2)} = \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\alpha_l k_{lm}}; \quad K_{lm}^{(1)} = \eta \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\beta_m k_{lm}};$$

$$L_{lm}^{(1)} = -\frac{1}{2\beta_m k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c} \cdot \left[X_{lm}^{(1)} (1 + \operatorname{ch} k_{lm} c) \left(\eta - \frac{c k_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} \right) + \right.$$

$$\left. + X_{lm}^{(2)} (1 - \operatorname{ch} k_{lm} c) \left(\eta + \frac{c k_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} \right) \right]; \tag{7}$$

$$K_{lm}^{(3)} = -\frac{1}{2\beta_m \alpha_l \operatorname{sh} k_{lm} c} \left[X_{lm}^{(1)} (\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) \left(\frac{c k_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} + \eta + 1 \right) - \right.$$

$$\left. - X_{lm}^{(2)} (1 - \operatorname{ch} k_{lm} c) \left(\frac{c k_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} - \eta - 1 \right) \right].$$

Входящие в (7) неизвестные постоянные $X_{lm}^{(1)}$, $X_{lm}^{(2)}$, Y_{mn}, Z_{ln} должны быть определены из следующих систем бесконечных уравнений.

$$e_{lm} X_{lm}^{(1)} = \sum_{n=0,2\ldots}^{\infty} a_{lmn} Y_{mn} + \sum_{n=0,2\ldots}^{\infty} b_{lmn} Z_{ln} + q_{lm}; \tag{8.1}$$

$$(l = 1, 2 \cdots; \ m = 1, 2 \cdots)$$

$$f_{lm} X_{lm}^{(2)} = \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} a_{lmn} Y_{mn} + \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} b_{lmn} Z_{ln} + q_{lm}; \tag{8.2}$$

$$(l = 1, 2 \cdots; \ m = 1, 2 \cdots)$$

$$g_{mn} Y_{mn} = \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn} Z_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(1)} \tag{8.3}$$

$$(n = 0, 2, 4 \cdots; \ m = 1, 2 \cdots)$$

$$g_{mn} Y_{mn} = \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn} Z_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \tag{8.4}$$

$$(n = 1, 3 \cdots; \ m = 1, 2 \cdots)$$

$$h_{ln} Z_{ln} = \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn} Y_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(1)} \tag{8.5}$$

$$(n = 0, 2 \cdots; \ l = 1, 2 \cdots)$$

$$h_{ln} Z_{ln} = \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn} Y_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \tag{8.6}$$

$$(n = 1, 3 \cdots; \ l = 1, 2 \cdots),$$

где введены обозначения:

$$e_{lm} = -\frac{k_{lm}}{\alpha_l \beta_m} \frac{1 - 2\nu}{v} \frac{\operatorname{sh} k_{lm} c + k_{lm} c}{\operatorname{ch} k_{lm} c - 1};$$

$$f_{lm} = \frac{k_{lm}}{\alpha_l \beta_m} \frac{1 - 2\nu}{v} \frac{\operatorname{sh} k_{lm} c - k_{lm} c}{\operatorname{ch} k_{lm} c + 1}; \tag{9}$$

$$g_{mn}=\frac{a}{c}\cdot\frac{(3-4\nu)\,\mathrm{th}\,k_{mn}a-\dfrac{ak_{mn}}{\mathrm{ch}^2 k_{mn}a}}{k_{mn}\beta_m};$$

$$h_{ln}=\frac{b}{c}\cdot\frac{(3-4\nu)\,\mathrm{th}\,k_{ln}b-\dfrac{bk_{ln}}{\mathrm{ch}^2 k_{ln}b}}{\alpha_l k_{ln}};$$

$$a_{lmn}=\frac{8}{c}\,\frac{1-2\nu}{v}\,\frac{\alpha_l(-1)^{l-1}}{\beta_m(\alpha_l^2+k_{mn}^2)}\left(\nu-\frac{\gamma_n^2}{\alpha_l^2+k_{mn}^2}\right);$$

$$b_{lmn}=\frac{8}{c}\,\frac{1-2\nu}{v}\,\frac{\beta_m(-1)^{m-1}}{\alpha_l(\alpha_l^2+k_{mn}^2)}\left(\nu-\frac{\gamma_n^2}{\beta_m^2+k_{ln}^2}\right); \tag{9}$$

$$c_{lmn}=-\frac{4}{c}\cdot\frac{\beta_m(-1)^{l-1}\cdot(-1)^{n-1}}{(\alpha_l^2+k_{mn}^2)^2};$$

$$c_{lmn}^{(1)}=\frac{4}{c}(-1)^{l-1}\cdot(-1)^n\cdot\frac{\gamma_n^2-\nu(\gamma_n^2+k_{lm}^2)}{\beta_m\cdot(k_{lm}^2+\gamma_n^2)^2};$$

$$d_{lmn}=\frac{4}{c}\cdot\frac{\alpha_l(-1)^{m-1}(-1)^{l-1}}{(\alpha_l^2+k_{mn}^2)^2};$$

$$d_{lmn}^{(1)}=\frac{4}{c}(-1)^{m-1}(-1)^n\,\frac{\gamma_n^2-\nu\cdot(k_{lm}^2+\gamma_n^2)}{\alpha_l\cdot(\alpha_l^2+k_{mn}^2)^2}.$$

Свободный член q_{lm}, входящий в (7), является коэффициентом разложения в ряд Фурье $f(x, y)$ в области $(0<x<a;\ 0<a<b)$

$$f(x, y)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} q_{lm}\cos\alpha_l x\cos\beta_m y. \tag{10}$$

Докажем, что бесконечная система (8.1) квазивполне регулярна. Действительно, из (9) следует, что

$$S_1=\sum_{n=0,2\ldots}^{\infty}\left|\frac{a_{lmn}}{e_{lm}}\right|+\sum_{n=0,2\ldots}^{\infty}\left|\frac{b_{lmn}}{e_{lm}}\right|=\frac{\mathrm{ch}\,k_{lm}c-1}{\mathrm{sh}\,k_{lm}c+k_{lm}c}\times$$

$$\times\frac{8k_{lm}}{c}\sum_{n=0,2\ldots}^{\infty}\frac{|\nu k_{lm}^2-(1-\nu)\gamma_n^2|}{(\gamma_n^2+k_{lm}^2)^2}=\frac{\mathrm{ch}\,k_{lm}c-1}{\mathrm{sh}\,k_{lm}c+k_{lm}c}\times$$

$$\times\frac{8k_{lm}}{c}\left[2\sum_{n=2,4\ldots}^{n_{k_{l0}}}\frac{\nu k_{lm}^2-(1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2+k_{lm}^2)^2}+\frac{\nu}{k_{lm}^2}-\sum_{n=2,4\ldots}^{\infty}\frac{k_{lm}^2-(1-\nu)(\gamma_n^2+k_{lm}^2)}{(\gamma_n^2+k_{lm}^2)^2}\right]=$$

$$=\frac{16k_{lm}}{c}\sum_{n=2,4\ldots}^{n_{k_{l0}}}\frac{\nu k_{lm}^2-(1-\nu)\gamma_m^2}{(\gamma_n^2+k_{lm}^2)^2}+(1-2\nu)\,\mathrm{cth}\,\frac{k_{lm}c}{2}\,\frac{12\nu}{k_{lm}c}-\frac{k_{lm}c}{2\,\mathrm{sh}^2\dfrac{k_{lm}c}{2}}. \tag{11}$$

Здесь $n_{k,o}$ — целое число, которое определяется из неравенства

$$\nu k_{lm}^2-(1-\nu)\gamma_n^2>0$$

$$n_{k,o} \leqslant \frac{ck_{lm}}{\pi}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} = a_{k,o}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \qquad \text{где:} \quad a_{k,o} = \frac{ck_{lm}}{\pi}. \tag{12}$$

Оценивая конечную сумму, входящую в (11)

$$\frac{16k_{lm}}{c}\sum_{n=2,4\ldots}^{n_{k,o}} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 - k_{lm}^2)^2}; \tag{13}$$

из выражения (13) после его преобразования при помощи (12) получаем:

$$\frac{8a_{k,o}}{\pi}\sum_{n=1,2\ldots}^{n_{k,o}} \frac{\nu a_{k,o}^2 - (1-\nu)n_{k,o}^2}{(n_{k,o}^2 + a_{k,o}^2)^2} \leqslant \frac{8a_{k,o}}{\pi}\int\limits_0^{n_{k,o}} \frac{\nu a_{k,o}^2 - (1-\nu)x^2}{(x^2 + a_{k,o}^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{8a_{k,o}}{\pi}\left(\frac{n_{k,o}}{2(a_{k,o}^2 + n_{k,o}^2)} - \frac{1-2\nu}{2a_{k,o}}\operatorname{arctg}\frac{n_{k,o}}{a_{k,o}}\right) = \frac{4}{\pi}\Bigg[\sqrt{\nu(1-\nu)} -$$

$$- (1-2\nu)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\Bigg]. \tag{14}$$

Следовательно, для сумм коэффициентов бесконечной системы (8,1) получаем оценку

$$S_1 \leqslant \frac{\operatorname{ch} k_{lm}c - 1}{\operatorname{sh} k_{lm}c + k_{lm}c}\left\{\frac{4}{\pi}\left[\sqrt{\nu(1-\nu)} - (1-2\nu)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right] +\right.$$

$$\left. + (1-2\nu)\operatorname{cth}\frac{k_{lm}c}{2} + \frac{12\nu}{k_{lm}c} - \frac{k_{lm}c}{2\operatorname{sh}^2\frac{k_{lm}c}{2}}\right\} = \varphi(k_{lm}, \nu),$$

где

$$\lim_{k_{lm}\to\infty} \varphi(k_{lm}, \nu) = \frac{4}{\pi}\left[\sqrt{\nu(1-\nu)} - (1-2\nu)\operatorname{argtg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}\right] +$$

$$+ (1-2\nu) = f(\nu).$$

Расчеты показывают, что

$$f(o) = 1; \quad f(0{,}5) = \frac{2}{\pi}.$$

Для производной функции $f(\nu)$ имеем:

$$f'(\nu) = 2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} - 1\right) < 0 \qquad \text{при} \quad (0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}5).$$

Значит, функция $f(\nu)$ монотонно убывает в промежутке $(0 < \nu \leqslant 0{,}5)$ и имеет максимальное значение при $\nu = 0$. Следовательно, бесконечная система (8,1) квазивполне регулярна при $(0 < \nu \leqslant 0{,}5)$.

Такую же оценку получаем для бесконечной системы (8,2).

Для систем (8,3) имеем:

$$S_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{c_{lmn}}{g_{mn}} \right| + \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{c_{lmn}^{(1)}}{g_{mn}} \right| \leqslant \frac{\beta_m k_{mn}}{(3-4\nu)\,\mathrm{th}\, k_{mn} a - \dfrac{a k_{mn}}{\mathrm{ch}^2 k_{mn} a}} \times$$

$$\times \frac{4}{a} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 + \nu (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)}{\beta_m (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{(3-4\nu)\,\mathrm{th}\, k_{mn} a - \dfrac{a k_{mn}}{\mathrm{ch}^2 k_{mn} a}} \left[(1+2\nu)\,\mathrm{th}\, k_{mn} a - \frac{a k_{mn}}{\mathrm{ch}^2 k_{mn} a} \right] =$$

$$= 1 - 2\, \frac{(1-3\nu)\,\mathrm{th}\, k_{mn} a}{(3-4\nu)\,\mathrm{th}\, k_{mn} a - \dfrac{a k_{mn}}{\mathrm{ch}^2 k_{mn} c}} < 1 \quad \text{при} \quad \left(\nu < \frac{1}{3} \right).$$

Аналогично доказывается, что бесконечные системы (8,4; 8,5; 8,6) также вполне регулярны. Таким образом, замечаем, что все бесконечные системы (8,1—8.6) либо вполне регулярны, либо квазивполне регулярны, поэтому формулы (7) позволяют определить все неизвестные постоянные интегрирования.

В заключение статьи отметим, что полученные результаты могут быть распределены также для случаев, когда перемещения на кромках $x = a$ и $y = b$ являются не нулевыми, а произвольными заданными функциями, не нарушающими симметричность распределения перемещений относительно координатных осей x, y. Такое обобщение полученных результатов требует введения новых свободных членов в уравнениях (8,1—8,6), которые не отражаются на регулярность бесконечных систем.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Ս. Մ. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

Կողմնային նիստերով ամրակցված ուղղանկյուն հաստ սալի ծռումը

Հոդվածում տրվում է կողմնային նիստերով ամրակցված ուղղանկյուն հաստ սալի ծռման և ձգման խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ արտաքին բեռը ազդում է ($z = c$) հարթության վրա և բաշխված է կոորդինատական x, y առանցքների նկատմամբ սիմետրիկ։ Այդ սիմետրիկությունը հնարավորություն է տալիս խնդրի լուծումը իրականացնել սալի քառորդ մասի համար ($x, y \geqslant 0$) օգտվելով ($y = 0$ և $x = 0$) հարթությունների վրա եղած (1) պայմաններից։

Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների (8.1—8.6) անվերջ սիստեմների լուծմանը։ Ցույց է տրվում, որ այդ սիստեմները կվազի—լիովին ռեգուլյար են և ունեն վերևից սահմանափակ ու զրոյի ձգտող ազատ անդամներ։