

DA-5638

МЕХАНИКА

А. Г. Багдоев

Решение задачи о движении идеального жидкого полупространства под действием ударной волны

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 1/Х 1964)

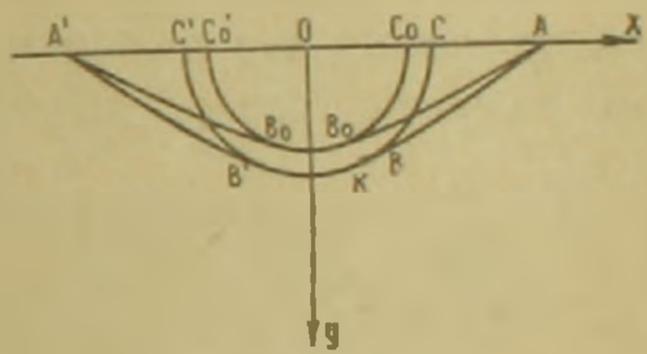
1. Пусть в некоторой точке  $O$  границы жидкого полупространства возникает некоторое давление, которое далее движется по границе ударной волны.

Допустим, что скорость фронта давления по границе  $V$  и значение давления во фронте на границе (точка  $A$ , фиг. 1)  $P_\Phi = P_1$  постоянные.

Предположим, что давление возникает вдоль прямой по поверхности полупространства. Тогда задача будет плоской. Выберем ось  $Ox$  по границе невозмущенной жидкости, ось  $Oy$  в глубь жидкости,  $O$  точка возникновения давления на границе. Граничное условие на границе жидкости имеет вид

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1 P_a \left( \left| \frac{x}{Vt} \right| \right) \\ 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$|x| < Vt, \quad |x| > Vt,$$

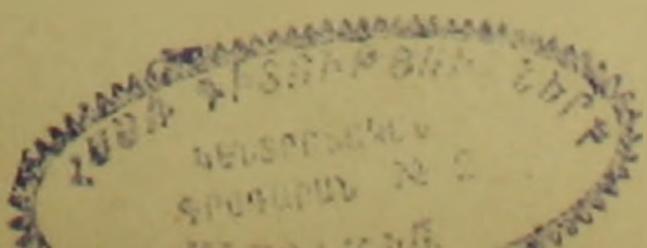


Фиг. 1.

где  $t$  время,  $P_a \left( \left| \frac{x}{Vt} \right| \right)$  распределение давления за фронтом по границе.

Рассмотрим случай  $V > a_0$ ;  $a_0$  — начальная скорость звука. Область возмущенного движения будет ограничена линией  $ABB'A'$  фиг. 1, где  $BB'$  — участок ударной волны, соответствующий области влияния начальных условий,  $AB$  — огибающая граничных возмущений. В линейном случае граница возмущенной области дается линией  $AB_0B_0A$  фиг. 1.

Решение линейной задачи вблизи линии  $BB'$  имеет вид <sup>(1)</sup>,



$$\frac{P}{P_1} = f(\theta) \frac{\sqrt{t - \frac{r_1}{a_0}}}{\sqrt{\frac{r_1}{a_0}}}, \quad (1.2)$$

где введены полярные координаты  $r_1, \theta$ , и в случае  $P_n = 1$

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} \sin \theta \sqrt{2} \frac{M}{1 - M^2 \cos^2 \theta}, \quad M = \frac{V}{a_0}. \quad (1.3)$$

Во втором приближении решение вблизи  $BB'$  найдется заменой линейных характеристик уточненными (2)

$$\frac{P}{P_1} = f(\theta) \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{\frac{r_1}{a_0}}}, \quad (1.4)$$

$$t = \frac{r_1}{a_0} - \beta(r_1) \sqrt{y_1} + y_1, \quad (1.5)$$

где  $\beta(r_1) = \frac{1}{a_0} \frac{n+1}{2} \frac{P_1}{Bn} \sqrt{r_1} \sqrt{a_0} 2f(\theta)$ ,  $Bn = \rho_0 a_0^2$ ,  $y_1$  мало.

На ударном фронте  $BB_1$  имеем  $\sqrt{y_1} = \frac{3}{4} \beta$ ,

$$\frac{P}{P_1} = \frac{3}{2} \frac{n+1}{2} f^2(\theta) \frac{P_1}{\rho_0 a_0^2}. \quad (1.6)$$

Нами показано, что решение (1.4), (1.5) соответствует точному частному решению газовой динамики

$$r_1 = a_0 t \left( 1 + \frac{n+1}{2} \frac{P_1}{Bn} \delta \right), \quad \frac{P}{P_1} = \mu, \quad (1.7)$$

$$\delta = 2\mu + C\mu^2, \quad (1.8)$$

полученному академиком Л. И. Седовым (3).

Решение (1.4), (1.5) будет малой второго порядка, но имеет конечные производные по  $r_1$  — короткая волна.

Рассмотрим решение вблизи точек  $B, B'$  соединения областей эллиптичности  $BCC'B'$  и гиперболичности  $ABC, A'B'C'$  уравнений в переменных  $\zeta = \frac{x}{t}$ ,  $\eta = \frac{y}{t}$  на ударной волне. В линейном случае

точка соединения  $B_0$  имеет координату  $\cos \theta_0 = \frac{a_0}{V}$ . Решение (1.4),

(1.5) будет справедливо для точек  $BB'$ ,  $\theta - \theta_0 \sim \delta \left( \frac{P_1}{Bn} \right)^\alpha$ ,  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

причем в решении порядок давления  $\left( \frac{P_1}{Bn} \right)^{2-2\alpha}$ . При  $\alpha = \frac{1}{2}$  нельзя пользоваться одномерными характеристиками. Решение в окрестности

точки  $B$  будет двумерной короткой волной, которую можно построить методом С. А. Христиановича и О. С. Рыжова (4).

Введем переменные\*

$$r_1 = a_0 t \left( 1 + \frac{n+1}{2} M_0 \delta \right), \quad v_{r_1} = M_0 a_0 \mu, \quad (1.9)$$

$$\theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2} M_0} Y, \quad v_\theta = M_0^{\frac{3}{2}} a_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} \nu,$$

$$M_0 = \frac{P_1}{Bn}, \quad \frac{P}{Bn} = M_0^{\frac{1}{2}} \nu,$$

где  $v_{r_1}$  радиальная, а  $v_\theta$  тангенциальная составляющие скорости. Решение уравнений коротких волн можно взять зависящим от трех констант (4)

$$\delta = -\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{d\mu} (Y - Y_B)^2 + F(\mu), \quad \nu - \nu_B = \varphi(\mu) (Y - Y_B), \quad (1.10)$$

где

$$\varphi(\mu) = \frac{1}{c} \operatorname{th} c(\mu - a) - \mu, \quad F(\mu) = \mu + \frac{1 + e^{-2c(\mu - a)}}{2c} - \frac{k}{2c} (ch 2c(\mu - a) - 1).$$

Вдоль линии  $BC$  имеем вблизи точки соединения  $B$   $\delta = 1$ ,  $\nu = 1$ , причем в точке  $B$

$$\mu_B = \nu_B = \delta_B = 1, \quad Y_B = -1. \quad (1.11)$$

Нетрудно найти из конечности

$\left( \frac{\partial \mu}{\partial Y} \right)_B$ , взятой вдоль линии  $BB'$ ,

$a = 1$ ,  $\left( \frac{\partial \mu}{\partial Y} \right)_B = -\frac{1}{2}$ . Приближен-

ная зависимость  $\frac{P}{P_1}$  от  $\theta$  дана на

Фиг. 2, где средняя часть графика

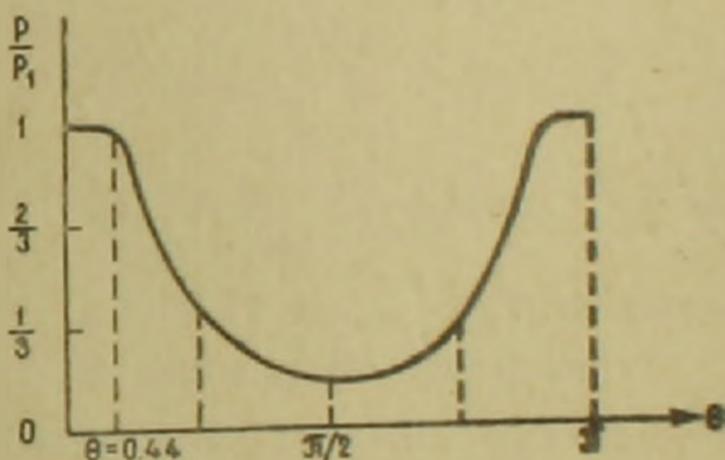
$\theta \sim \frac{\pi}{2}$  рассчитана по (1.6), по-

стоянное решение смыкается с (1.6) посредством решения (1.9), (1.10).

Для определения решения в области эллиптичности  $CBV'S'$  можно ввести по методу Лайтхилла (5)

$$r = R + r_1(\theta) + r_2(\theta), \quad (1.12)$$

где  $r_1 = 0$  для области  $BB'$  и  $r_1(\theta) = v_{r_1} + \frac{n-1}{2} \frac{P_1}{Bn}$  на  $BC$ . Тогда,



Фиг. 2.

\* В работе (6) также даны уравнения типа (1). Частное решение (6), однако, не удовлетворяет всем условиям в  $B$ .

если записать уравнение для второго приближения в независимых переменных  $R, \theta$  и перейти к переменным Чаплыгина, можно получить граничную задачу для уравнения Лапласа с правой частью в полукруге  $R=1, 0 < \theta < \pi$ , причем в окрестности точки  $B$  решение  $r_1$  следует взять из (1.10).

Решение для второго приближения можно искать также в переменных  $x, y, t$ . Если потенциал скоростей  $\varphi$  искать в виде

$$\varphi = \gamma \varphi_1(u, x, y) + \gamma^2 \varphi_2(u, x, y), \quad (1.13)$$

$$t = u + \gamma t_1(u, x, y), \quad (1.14)$$

где  $\gamma = \frac{P_1}{\rho_0 a_0^2}$ , то получим для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} = & 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2} \left( \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{n-1}{2a_0^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \right) - \\ & - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial u} \left( a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial u} \left( a_0^2 \frac{\partial t_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 t_1}{\partial u^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 t_1}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

В окрестности  $r_1 = a_0 t$  правая часть (1.16), где  $\varphi_1$  находится из (1.3), имеет особенность; выберем  $t_1$  из условия обращения в нуль при  $r_1 = a_0 t$  коэффициентов при  $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial u}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial u}$

$$t_1 = -\frac{n-1}{2} t - \frac{r_1}{a_0} \cos(\beta - \theta), \quad (1.17)$$

где  $\beta$  угол нормали к  $AB$  с  $Ox$ , причем  $v_{r_1} = \frac{P_1}{\rho_0 a_0} \cos(\beta - \theta)$ . Очевидно, что формулы (1.14), (1.17) и (1.18) дают одинаковый результат.

Для решения задачи во втором приближении во всей области  $ABV'A'$  для произвольного давления на поверхности используем рассмотрение частных случаев работы (\*).

Здесь снова применяется представление (1.13), (1.14), где  $t_1(u, x, y)$  находится из условия равенства нулю потенциала  $\varphi_2$  при  $u = \tau_1, t = \tau_1(x, y)$  уравнение линии  $AB_0$ ; полученное при этом значение  $\gamma t_1$  совпадает со значением нелинейного добавка к уравнению ударной волны  $AB_0$ , полученного нами методом замены линейных характеристик уточненными (\*\*); далее можно решать волновое уравнение с правой частью (1.16) в переменных  $u, x, y$  в полупространстве.

2. Задача § 1 по математической постановке совпадает с задачей по коническим течениям, имеющим место при обтекании под малым углом атаки  $\alpha'$  низа треугольного и края низа прямоугольного крыла.

\* Давление на ударной волне во втором порядке найдется в конечном виде.

Для случая треугольного крыла со сверхзвуковыми кромками, с углом полураствора  $\beta$ , обтекаемого в направлении оси  $Oz$  со сверхзвуковой скоростью  $V$ , возмущенная область дается на фиг. 1, где в сече-

нии  $z$   $OA = z \operatorname{tg} \beta$ ,  $OB_0 = \frac{z}{\sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}}$ . Пусть  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $V \rightarrow v_z$  составляющие скорости по осям.

Вблизи линии  $BB'$  решение подобно (1.2) § 1

$$\frac{v_y}{Va'} = f_2(\theta) \sqrt{\frac{z - r \sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}}{z}}, \quad (2.1)$$

где

$$f_2(\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin \theta \operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta \left( \frac{V^2}{a_0^2} - 1 \right) \cos^2 \theta}, \quad v_r = - \sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1} v_z,$$

$r$ ,  $\theta$  полярные координаты в плоскости

Если использовать метод замены линейных характеристик точными, найдем решение вблизи  $BB'$

$$v_z = - A(\theta) \frac{\sqrt{y_1}}{\sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1} \sqrt{r}}, \quad A(\theta) = \frac{f_2(\theta) \operatorname{tg} \beta Va'}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta \left( \frac{V^2}{a_0^2} - 1 \right) - 1}}$$

$$\sqrt{y_1} = \frac{q(r) + \sqrt{q^2(r) + 4 \left( z - r \sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1} \right)}}{2}, \quad (2.2)$$

$$q(r) = (n+1) \frac{V^3}{a_0^4} \sqrt{r} \frac{A(\theta)}{\left( \frac{V^2}{a_0^2} - 1 \right)^{\frac{3}{4}}}$$

Исключая  $\sqrt{y_1}$ , найдем решение, найденное Лайтхиллом другим способом (9). На ударном фронте  $BB'$  имеем

$$v_r = \frac{3}{4} A^2(\theta) \frac{V^3}{a_0^4} (n+1) \frac{1}{\left( \frac{V^2}{a_0^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.3)$$

$v_r$ ,  $v_\theta$  радиальная и трансверсальные составляющие скорости.

Как выяснилось, возможность получения (2.3) указанным методом впервые показана Витемом (Journal Fluid Mech. 1956, № 3).

Решение (2.3), определяемое переменными  $\frac{r}{z}$ ,  $\theta$ , для дуги  $BB'$

будет справедливо до расстояний от  $B$ , превышающих по порядку

$$\frac{1}{\gamma^2}, \quad \gamma = \frac{(v_r)_B}{a_0}, \quad \theta - \theta_0 > V\gamma, \quad \cos \theta_0 = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta \sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}}, \quad (v_r)_B = \frac{Vx'}{\sin \theta_0}$$

Вблизи точки  $B$  имеем двумерную короткую волну.

Вводя переменные

$$\zeta = \frac{r \sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1}}{z}, \quad \zeta = 1 + M_0 \delta, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{M_0} Y, \quad (2.4)$$

$$v_\theta = M_0^{\frac{3}{2}} a_0 v, \quad v_r = M_0 a_0 u, \quad M_0 = \gamma,$$

получим из уравнений трехмерного установившегося движения

$$(n+1) \lambda \mu \frac{\partial \mu}{\partial \delta} - 2\delta \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{\partial v}{\partial Y} + \mu = 0, \quad (2.5)$$

$$\sqrt{\frac{V^2}{a_0^2} - 1} v_z = -v_r, \quad (2.6)$$

где постоянная  $\lambda = \frac{V^3}{a_0^2 \left(\frac{V^2}{a_0^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}$ .

Если ввести переменные  $\sqrt{\lambda} v' = v$ ,  $\sqrt{\lambda} Y' = Y$ ,  $\lambda \delta' = \delta$ , получим в точке  $B$  значения  $v'_B = \delta'_B = \mu_B = 1$ ,  $Y'_B = -1$  и решение будет даваться на фиг. 2.

Отметим, что имеющаяся по этому поводу работа <sup>(10)</sup>, относящаяся к обтеканию низа края прямоугольного крыла, решение для которого можно получить из предыдущего, полагая  $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$  <sup>(9)</sup>, содержит вывод о том, что при перемещении вдоль ударной волны оси  $Oy$ , за точкой  $B$  скорость  $v_y$  скачком возрастает со значения  $V$  до  $\frac{8}{5} Va'$ . Этот вывод, противоречащий факту наличия разрежения за точкой  $B$ , получен из предпосылок о том, что решение вблизи точки  $B$  малое первого порядка и его производные по  $r$  также малы первого порядка, тогда как мы показали, что производные по  $r$  конечны вблизи ударной волны.

3. В случае, если над поверхностью жидкости произведен взрыв на высоте  $h$ , граничное условие можно задавать в виде

$$P(x, y, t) = \begin{cases} P_1(x, t) & x < R(t), \\ 0 & x > R(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $x = R(t)$  координата фронта давления по поверхности, причем  $R'(0) = \infty$ . Этот факт существенно меняет картину движения. В линейной постановке для координаты точки  $B$  имеем  $x_B = \frac{a_0 t}{R'(0)}$  или  $x_B = 0$ . Отсюда следует, что участок  $BB'$ , требующий особого рассмотрения, здесь отсутствует. Можно найти, что давление в точке  $B_0$  по линейной теории, взятое вдоль ударной волны  $AB_0$  и вдоль  $Oy$ , совпадает. Следовательно, давление в линейной постановке непрерывно в точке  $B_0$ .

Другой характерной особенностью рассматриваемой задачи является отсутствие ветвления вблизи линии  $BC$ ,  $r = a_0 t$ . Известно, что в случае  $R'(t) = \text{const}$  § 1 вблизи линии  $r = a_0 t$  имеет место ветвление. Этот факт отсутствует в общей задаче с  $h > 0$ .

Для больших моментов  $t$  можно найти давление на ударной волне  $BB'$  методом замены линейных характеристик точными, причем в случае  $R'(0) < \infty$  полученное решение будет годиться для всех моментов  $t$ , поскольку условие  $\frac{a_0 y_1}{r} \ll 1$  будет всегда выполняться (°) на ударной волне,  $y_1 = \text{const}$  уравнение характеристик, где в линейном случае  $y_1 = t - \frac{r}{a_0}$ . В случае же  $R'(0) = \infty$  не удастся получить единой формулы и необходимо склеивать два решения для конечных и больших  $t$ .

Методом (°), примененным для обтекания тел вращения, найден также хвостовой скачок в задаче о давлении.

Институт математики и механики  
Академии наук Армянской ССР

Ա. Գ. ԲԱԳԿՈՅԿ

**Հարվածային ալիքի ազդեցության թակ գտնվող սեղմելի հեղուկի կիսաթաղանթի շարժման խնդիրը**

Հեղուկի կիսաթաղանթի շարժման խնդիրը ճնշման ազդեցության տակ ուսումնասիրվում է գծային տեսության ուղղումը հարվածի ալիքի ճակատի  $BB'$  (գծ. 1) շրջակայքում: Եթե գծային տեսության տված լուծման մեջ գծային խարակտերիստիկաները փոխարինել ճշգրտվածներով, ապա ճնշումը հարվածային ճակատի մոտ գտնվում է վերջավոր տեսքով: Հարվածային ալիքների  $AB$  և  $BB'$  (նկ. 1) հատման կետի մոտ բերված մեթոդը ճիշտ լուծում չի տալիս և լուծումը տրվում է կարճ ալիքների մեթոդով: Նույն մեթոդներով ուսումնասիրված է եռանկյուն քառանկյուն ձևերի շրջնոսման խնդիրները, որոնք մինչ այդ ուսումնասիրված էին ոչ ճիշտ (1°):

Ներկա հոդվածում գտնված է ճնշումը հարվածային ճակատի վրա և տված է լուծման գտնելու մեթոդը ամբողջ ախրույթում:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИЦЦԱՆՈՒՅՆՆԵՐ

- <sup>1</sup> А. Г. Багдоев, Пространственные нестационарные движения, Ереван, 1961.  
<sup>2</sup> А. Г. Багдоев, „Известия АН АрмССР“, т. XVII, № 5 (1964). <sup>3</sup> Л. И. Седов, ПМТФ, т. IX, в. 4 (1945). <sup>4</sup> А. А. Гриб, О. С. Рыжов, С. А. Христианович, ПМТФ, № 1960. <sup>5</sup> М. Д. Лайтхилл, Philosophical Magazine Kol. 40, 1949. <sup>6</sup> Н. Х. Куо, J. Aeronaut. Sci. Kol. 22, № 7, 1955. <sup>7</sup> М. Х. Кларксон, Quarterly Journal of Mechanics Kol. VII, 1954. <sup>8</sup> А. Г. Багдоев, „Известия АН АрмССР“, т. XIV, № 5 (1961). <sup>9</sup> Новая теория аэродинамики больших скоростей. М., 1962. <sup>10</sup> Ж. Леграс, Nouvelles applications de la methode de Lighthill, Paris, ONeRa, 1953.