

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

Кручение неортотропных составных призматических стержней

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13/IV 1964)

Задача кручения составного призматического упругого стержня через функцию кручения Сен-Венана была решена Н. И. Мусхелишвили⁽¹⁾, а через функции напряжений Прандтля—К. С. Чобаняном⁽²⁾. Та же задача с учетом линейной ползучести через функцию напряжений исследована Н. Х. Арутюняном и К. С. Чобаняном⁽³⁾, а с учетом нелинейной ползучести рассмотрена в работе⁽⁴⁾.

Задача кручения ортотропного слоистого прямоугольного упругого стержня впервые решена С. Г. Лехницким⁽⁵⁾. Та же задача для изотропного стержня как упругого, так и с учетом ползучести иным методом рассмотрена в работе⁽⁶⁾.

Задача кручения стержней, составленных из различных анизотропных материалов через функцию кручения Сен-Венана, рассмотрена К. И. Боршом⁽⁷⁻⁹⁾. Метод, который ведет к решению этой задачи, основан на идее Н. И. Мусхелишвили⁽¹⁾, а именно решить задачу при помощи обобщенного потенциала. Кручению неоднородных анизотропных упругих цилиндров посвящена работа Чжяо Хуэй-юана⁽¹⁰⁾.

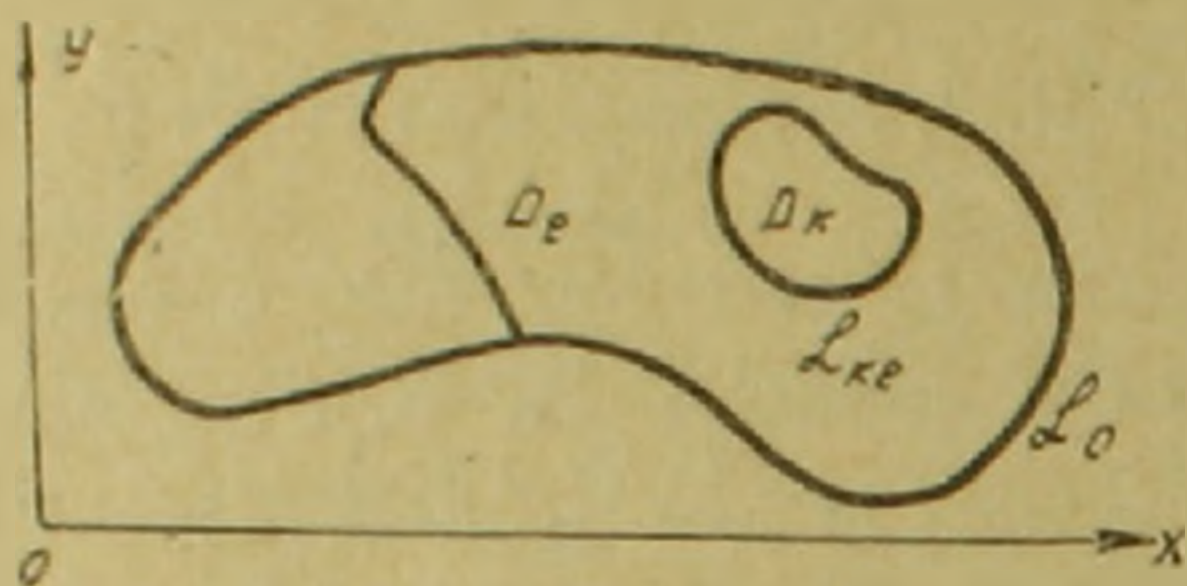
В настоящей работе рассматривается задача кручения стержней, составленных из различных анизотропных (неортотропных) материалов, через функцию напряжений Прандтля. Получены основные дифференциальные уравнения задачи и необходимые условия, при помощи которых однозначно определяется функция напряжений во всей области поперечного сечения стержня. Предложен способ решения полученных дифференциальных уравнений с неразделяющимися переменными. Этим способом полученные дифференциальные уравнения приводятся к системе рекуррентных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

В работе дается обобщение теоремы Бредта о циркуляции касательных напряжений при кручении призматических стержней, составленных из различных неортотропных материалов.

В качестве примера решена задача о кручении неортотропных двухслойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения.

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим анизотропный призматический стержень, составленный из различных анизотропных призматических тел, спаянных или склеенных по боковым поверхностям, когда упругие постоянные этих тел различны. Предположим, что в каждой точке каждого тела имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к оси стержня (т. е. каждое тело — неортотропное).

Область поперечного сечения, соответствующую различным материалам стержня, обозначим через $D_1, D_2, \dots, D_n$, линию раздела смежных областей D_k и D_l — через L_{kl} , а контур всей области — через L_0 (фиг. 1). Поместим начало прямоугольной системы координат



Фиг. 1.

x, y, z в некоторой точке концевого сечения стержня, направив ось z параллельно его образующим.

Рассмотрим напряженное состояние данного стержня при воздействии двух закручивающих моментов M_1 , приложенных на его торцах.

Положим, как и при кручении однородных стержней, что компоненты напряжений и деформации, за исключением $\tau_{xz}^{(k)}, \tau_{yz}^{(k)}$ и $\gamma_{xz}^{(k)}, \gamma_{yz}^{(k)}$, равны нулю, т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} = \sigma_y^{(k)} = \sigma_z^{(k)} = \tau_{xy}^{(k)} = 0, \\ \varepsilon_x^{(k)} = \varepsilon_y^{(k)} = \varepsilon_z^{(k)} = \gamma_{xy}^{(k)} = 0. \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Тогда уравнения равновесия для элемента стержня примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(k)}}{\partial y} = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

и будут тождественно удовлетворены, если, как обычно, положить

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{(k)} = \frac{\partial \Psi_k}{\partial y}, \quad \tau_{yz}^{(k)} = -\frac{\partial \Psi_k}{\partial x} \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\Psi_1(x, y), \dots, \Psi_n(x, y)$ обозначают функцию напряжений Прандтля $\Psi(x, y)$ в областях $D_1, \dots, D_n$ соответственно.

В рассматриваемом случае обобщенный закон Гука имеет вид ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \gamma_{yz}^{(k)} = a_{44}^{(k)} \tau_{yz}^{(k)} + a_{45}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)}, \\ \gamma_{xz}^{(k)} = a_{45}^{(k)} \tau_{yz}^{(k)} + a_{55}^{(k)} \tau_{xz}^{(k)}. \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $a_{ij}^{(k)}$ — упругие постоянные, удовлетворяющие условиям

$$a_{44}^{(k)} > 0, \quad a_{55}^{(k)} > 0, \quad a_{44}^{(k)} a_{55}^{(k)} - [a_{45}^{(k)}]^2 > 0. \quad (1.5)$$

условия неразрывности деформаций в силу (1.1) примут вид

$$\frac{\partial \gamma_{xz}^{(k)}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^{(k)}}{\partial x} = -2\vartheta \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.6)$$

где ϑ — угол закручивания на единицу длины стержня.

Подставляя выражения $\gamma_{xz}^{(k)}$ и $\gamma_{yz}^{(k)}$ из (1.4) в (1.6) и принимая во внимание (1.3), находим

$$a_{44}^{(k)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(k)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(k)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_k}{\partial y^2} = -2\vartheta \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (1.7)$$

Принимая, что боковая поверхность свободна от воздействия внешних сил, условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности L_{kl} области D_k и D_l , а также непрерывность перемещения $\tilde{\omega}$, находим

$$\Psi_0 = 0 \quad \text{на } L_0, \quad (1.8)$$

$$\Psi_k = \Psi_l, \quad \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial \nu} \right)_k = \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial \nu} \right)_l \quad \text{на } L_{kl}, \quad (1.9)$$

где

$$\left(\frac{\partial^*}{\partial \nu} \right)_k = a_{44}^{(k)} l_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_{55}^{(k)} l_2 \frac{\partial}{\partial y} - a_{45}^{(k)} \left(l_1 \frac{\partial}{\partial y} + l_2 \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$l_1 = \frac{dx}{d\nu}, \quad l_2 = \frac{dy}{d\nu}.$$

Итак, задача о кручении рассматриваемого стержня сводится к определению в D_0 функции $\Psi(x, y)$, удовлетворяющей в соответствии уравнению (1.7), граничным условиям (1.8) и условиям (1.9) на L_{kl} .

При этом ϑ определяется из соотношения

$$\vartheta = \frac{M_t}{C_t} \quad \left(C_t = \frac{2}{\vartheta} \iint_{D_0} \Psi d\Omega \right). \quad (1.10)$$

§ 2. Обобщение теоремы Бредта. Пусть Γ — замкнутая кривая, целиком лежащая в одной из односвязных или многосвязных областей D_k поперечного сечения стержня. Ω — площади области, ограниченной Γ . Тогда обобщение теоремы Бредта для рассматриваемой задачи будет

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial^* \Psi}{\partial \nu} \right)_k ds = -2\vartheta \Omega. \quad (2.1)$$

Пользуясь условием (1.9), формулу Бредта можно обобщить и для такой замкнутой линии Γ , которая лежит внутри D_0 поперечного сечения стержня и пересекает L_{kl} . В этом случае область D , ограниченная линией Γ и линиями L_{kl} , разбивается на несколько областей, в каждой из которых справедлива обобщенная формула Бредта (2.1).

В частном случае, если материал изотропен, то (2.1) совпадает с формулой, полученной в работе (2).

§ 3. О решении задачи кручения неортотропных составных призматических стержней. Обозначим через μ малый параметр для области D_1

$$\mu = \frac{a_{45}^{(1)}}{\sqrt{a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)}}} < 1. \quad (3.1)$$

Далее, введем новые переменные α и β , связанные со старыми зависимостями ^(12, 13)

$$x = \alpha, \quad y = \beta \sqrt{\frac{a_{55}^{(1)}}{a_{44}^{(1)}}}. \quad (3.2)$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.7) и условие (1.9) примут вид

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \alpha^2} - 2\mu \lambda_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \alpha \partial \beta} + \delta_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial \beta^2} = -\frac{2}{a_{44}^{(k)}} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3)$$

$$N_1 [u]_k + \mu N_1 [u]_k = N_1 [u]_l + \mu N_2 [u]_l \quad \text{на } L_{kl}, \quad (3.4)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \Psi_k(x, y) &= \vartheta u_k(\alpha, \beta), \quad \lambda_k = \frac{a_{45}^{(k)} \cdot a_{44}^{(1)}}{a_{45}^{(1)} \cdot a_{44}^{(k)}}, \quad \delta_k = \frac{a_{55}^{(k)} a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)} a_{44}^{(k)}}, \\ N_1 []_k &= a_{44}^{(k)} l_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{a}_{55}^{(k)} l_2 \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad N_2 []_k = -e_k \left(l_1 a_{44}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \beta} + l_2 \sqrt{a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \\ \bar{a}_{55}^{(k)} &= a_{55}^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}}, \quad e_k = \frac{a_{45}^{(k)}}{a_{45}^{(1)}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Представим решение уравнения (3.3) в виде ряда по степеням параметра μ ^(12, 13)

$$U_k(\alpha, \beta) = U_k^{(0)}(\alpha, \beta) + \sum_{l=1}^{\infty} U_k^{(l)}(\alpha, \beta) \cdot \mu^l \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3.6)$$

Подставляя значение $U_k(\alpha, \beta)$ из выражения (3.6) в дифференциальное уравнение (3.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , находим

$$\Delta_k U_k^{(0)} = \rho_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3.7)$$

$$\Delta_k U_k^{(i)} = \rho_k^{(i)}(\alpha, \beta) \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (3.8)$$

где

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \delta_k \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad \rho_k^{(0)} = -\frac{2}{a_{44}^{(k)}}, \quad \rho_k^{(i)}(\alpha, \beta) = 2\lambda_k \cdot \frac{\partial^2 U_k^{(i-1)}}{\partial \alpha \partial \beta} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (3.9)$$

При помощи (3.1), (3.2), (3.5), (3.6) из граничного условия (1.8) и из условий на линии раздела L_{kl} (1.9) легко получаются

$$U^{(i)} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad \text{на } L_0, \quad (3.10)$$

$$U_k^{(i)} = U_l^{(i)} \quad \text{на } L_{kl}$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 [U^{(0)}]_k &= N_1 [U^{(0)}]_l, \\ N_1 [U^{(i)}]_k + N_2 [U^{(i-1)}]_k &= N_1 [U^{(i)}]_l + N_2 [U^{(i-1)}]_l \end{aligned} \right\} \quad \text{на } L_{kl} \quad (3.11)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (3.3) с условиями (1.8) и (1.9) приводится к рекуррентным дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными (3.7) и (3.8) с более простыми условиями (3.10) и (3.11). Иначе говоря, задача о кручении неортотропных составных призматических стержней сводится к ряду задач, сходных с задачей о кручении ортотропных составных призматических стержней.

§ 4. Кручение неортотропных двухслойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения (фиг. 2). Нетрудно видеть, что для определения функции напряжений $U_k^{(o)}(\alpha, \beta)$ в каждой области D_k ($k = 1, 2$) нужно решить уравнение (3.7) с условиями

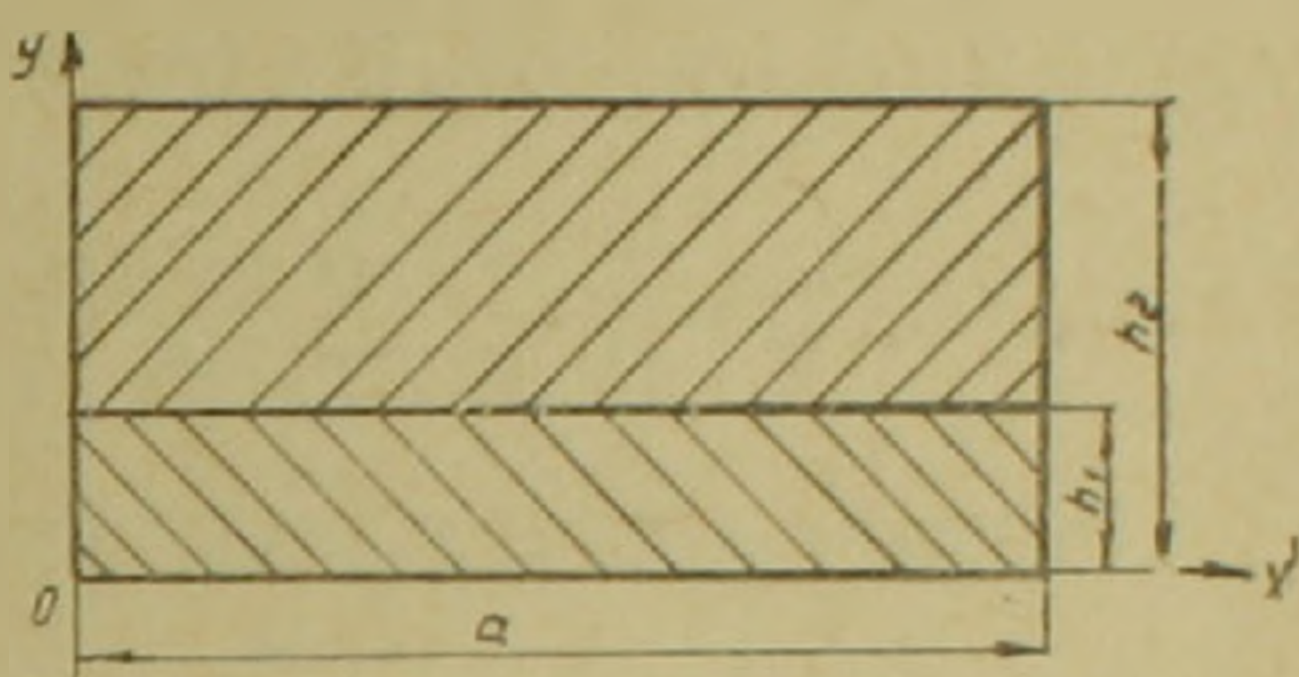
$$U_k^{(o)}(\alpha, \beta) = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (4.1)$$

при $\alpha = 0$ и $\alpha = a$

$$U_1^{(o)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } \beta = 0, \quad (4.2)$$

$$U_2^{(o)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при } \beta = \beta_2 \quad (4.3)$$

$$\left(\beta_2 = h_2 \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} \right),$$



Фиг. 2.

$$U_1^{(o)}(a, \beta) = U_2^{(o)}(\alpha, \beta) \quad \text{на } \beta = \beta_1 \quad \left(\beta_1 = h_1 \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} \right), \quad (4.4)$$

$$a_{55}^{(1)} \frac{\partial U_1^{(o)}}{\partial \beta} = a_{55}^{(11)} \frac{\partial U_2^{(o)}}{\partial \beta} \quad \text{на } \beta = \beta_1. \quad (4.5)$$

Решение уравнения (3.7) представим в виде

$$U_k^{(o)} = \sum_{j=1}^{\infty} (A_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta + B_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + b_{kj}) \sin \frac{\pi j \alpha}{a} \quad (k = 1, 2), \quad (4.6)$$

где

$$t_{kj} = \frac{\pi j}{a} \sqrt{\delta_k}, \quad b_{kj} = \frac{8a^2}{\pi^3 j^3 \delta_k a_{44}^{(k)}}.$$

Постоянные A_{kj} и B_{kj} определяются из (4.2)–(4.5).

Второе приближение строим следующим образом. Подставляя выражения $U_k^{(o)}(\alpha, \beta)$ из (4.6) в (3.8) и учитывая (3.9), получим

$$\Delta_k U_k^{(1)} = \sum_{j=1}^{\infty} E_{jk}(\beta) \cos \frac{\pi j \alpha}{a}, \quad \left[E_{jk}(\beta) = \frac{2\lambda_k \pi j t_{kj}}{a} (A_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + B_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta) \right]. \quad (4.7)$$

Из (3.10) и (3.11) для $U_k^{(1)}$ будем иметь следующие граничные условия

$$U_k^{(1)}(\alpha, \beta) = 0 \quad (k=1, 2) \quad \text{при} \quad \alpha = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = a, \quad (4.8)$$

$$U_1^{(1)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при} \quad \beta = 0, \quad (4.9)$$

$$U_2^{(1)}(\alpha, \beta) = 0 \quad \text{при} \quad \beta = \beta_2, \quad (4.10)$$

$$U_1^{(1)}(\alpha, \beta) = U_2^{(1)}(\alpha, \beta) \quad \text{на} \quad \beta = \beta_1, \quad (4.11)$$

$$\bar{q}_{12} \cdot \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \beta} = \frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \beta} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t_{1n}, t_{2n}, \beta) \sin \frac{\pi n \alpha}{a} \quad \text{на} \quad \beta = \beta_1, \quad (4.12)$$

где

$$C_n(t_{1n}, t_{2n}, \beta) = \bar{q}_{12} [\bar{B}_{n_1}(t_{1n}, \beta) - e_2 \bar{B}_{n_2}(t_{2n}, \beta)], \quad \bar{q}_{12} = \frac{a_{55}^{(1)}}{a_{55}^{(II)}},$$

$$\bar{B}_{nk}(t_{kn}, \beta) = -\frac{4}{a^2} \sum_{j=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{nj}{j^2 - n^2} (A_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta + B_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + b_{kj}).$$

Решение дифференциального уравнения (4.7) представим в виде

$$U_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \psi_{nk}(\beta) \sin \frac{\pi n \alpha}{a} \quad (k=1, 2). \quad (4.13)$$

Подставляя значения $U_k^{(1)}$ из (4.13) в уравнения (4.7), для определения $\psi_{nk}(\beta)$ получим следующее уравнение

$$\psi_{nk}^{II}(\beta) - \partial_k \left(\frac{\pi n}{2} \right)^2 \cdot \psi_{nk}(\beta) = \bar{G}_{nk}(\beta),$$

$$\left[\bar{G}_{nk}(\beta) = -\frac{4}{\pi a} \sum_{j=1, 3, \dots}^{\infty} E_{jk}(\beta) \frac{n}{j^2 - n^2} \right]. \quad (4.14)$$

Решив уравнение (4.14), из (4.13) находим для $U_k^{(1)}(\alpha, \beta)$ следующее значение

$$U_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} [C_{nk} \operatorname{sh} t_{kn} \beta + D_{nk} \operatorname{ch} t_{kn} \beta + d_{kn}(\beta)] \sin \frac{\pi n \alpha}{a}, \quad (4.15)$$

где

$$d_{kn}(\beta) = \sum_{j=1, 3}^{\infty} (R_{nkj} \operatorname{ch} t_{kj} \beta + T_{nkj} \operatorname{sh} t_{kj} \beta),$$

$$R_{nkj} = -\frac{8\lambda_k n j t_{kj}}{a^2 (j^2 - a^2)} \cdot \frac{A_{kj}}{t_{kj} - \partial_k \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2},$$

$$T_{nkj} = -\frac{8\lambda_k n j t_{kj}}{a^2 (j^2 - n^2)} \cdot \frac{B_{kj}}{t_{kj} - \partial_k \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2}.$$

Постоянные C_{nk} и D_{nk} определяются из (4.9)–(4.12).

Таким образом, имея $U_k^{(1)}(\alpha, \beta)$, при помощи (3.8)–(3.11), анало-

гично можно построить решения и в последующих приближениях. Ограничиваясь первыми двумя приближениями, учитывая (3.2), (3.5), (3.6), (4.6) и (4.15), для функции напряжений получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \Psi_k(x, y) = & \vartheta \sum_{j=1, 3} \left[A_{kj} \operatorname{sh} t_{kj} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + B_{kj} \operatorname{ch} t_{kj} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + b_{kj} \right] \times \\ & \times \sin \frac{\pi j x}{a} + \mu \vartheta \sum_{n=2, 4}^{\infty} \left[C_{nk} \operatorname{sh} t_{kn} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + D_{nk} \operatorname{ch} t_{kn} \sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}} y + \right. \\ & \left. + d_{kn}(\beta) \right] \sin \frac{\pi n x}{a} \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Имея функцию напряжений, при помощи (1.3) и (1.14) можно определить касательные напряжения и жесткость стержня.

Ереванский государственный университет
Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ո. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Բաղադրյալ ոչ օրթոտրոպ պրիզմաթիկ ձողերի ոլորումը

Դիտարկված է տարրեր նյութերից կազմված ոչ օրթոտրոպ (ամեն մի կետում առանցքին ուղղահայաց առաձգական մեկ սիմետրիայի հարթություն ունեցող) պրիզմատիկ ձողերի ոլորման խնդիրը: Ստացված են հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները և անհրաժեշտ պայմանները: որոնց օգնությամբ միարժեք կերպով որոշվում են լարվածության ֆունկցիաները (Պրանգտլի ֆունկցիաները) տրված տիրույթներում:

Առաջարկված է խնդրի լուծման եղանակը: Լուծումները ներկայացված են շարքով ըստ փոքր պարամետրի (ֆիզիկական պարամետր) աստիճանների: Այդ եղանակով, ստացված չանջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումները ընդվում են անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների ուկուրենտ ռիստեմի:

Ընդհանրացված է Բրեդտի թեորեմը:

Որպես կիրառություն լուծված է երկչերտ ուղղանկյուն ընդլայնական կտրվածք ունեցող ոչ օրթոտրոպ ձողի ոլորման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд. АН СССР, М.—Л., 1954. ² К. С. Чобанян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат., ест. и техн. наук), т. VIII, № 2 (1955). ³ Н. Х. Арутюнян, К. С. Чобанян, Известия АН СССР*, отд. технических наук, № 6, 1956. ⁴ М. М. Манукян, В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат. наук), т. XVI, № 3 (1963). ⁵ С. Г. Лехницкий, Инженерный сборник, т. 23, 1956. ⁶ В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР* (серия физ.-мат. наук), т. XII, № 4 (1959). ⁷ К. И. Борш, Studii și cercetări științifice, Acad. RPR, Filiala Iași, VII (1956), 2. ⁸ К. И. Борш, An Studii și cercetări științ. Univ. Iași, Sec. 1, 1957, 3 № 1—2, 207—212. ⁹ К. И. Борш, Studii și cercetări științ. Acad. RPR Fil. Iași, Mat., 1957, VIII, № 2, 163—190. ¹⁰ Чжяо Хуэй-юаня, Acta mech. sinica, 1959, 3, № 2. ¹¹ С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, Гостехтеоретиздат, М.—Л., 1950. ¹² В. С. Саркисян, Известия АН СССР*, ОТН Механика и машиностроение, № 2 (1963). ¹³ В. С. Саркисян, Известия АН АрмССР*, т. XV, № 5 (1962).