ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XL 1965 2

МАТЕМАТИКА

С. А. Акопян

О параметрических представлениях некоторых классов функций, голоморфных в угловых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 8/I 1965)

М. М. Джрбашян и А. Е. Аветисян [1, 2] рассматривали класс $M_2[\alpha, \omega]$ функций $F(z)$, голоморфных в области

$$\Delta(\alpha) : \{ |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}, \quad 0 < |z| < \infty \}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < \infty$$

и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|\varphi| < \pi/2\alpha} \left\{ \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega \, dr \right\} < \infty, \quad -1 < \omega < 1. \tag{1}$$

Ими получено параметрическое представление этого класса, которое дается следующей теоремой.

Теорема А. 1°. *Класс $M_2[\alpha, \omega]$ совпадает с множеством функций, допускающих представление вида*

$$F(z) = \int_0^\infty E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} z \tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(-)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} z \tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(+)}(\tau) \tau^{\mu-1} d\tau, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha}, \quad \rho > \frac{\alpha}{2\alpha - 1}, \quad \mu = \frac{1 + \omega + \rho}{2\rho}$$

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1} + \mu)},$$ *а функции $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$*

произвольны

2°. *Если* $F(z) \in M_2[\alpha, \omega]$, *то*

$$L_\rho(z; F) \equiv \int_0^\infty E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} z\tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(-)}(\tau; F)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty E_\rho\left(e^{-i\pi 2\gamma} z\tau^{1/\rho}; \mu\right) v_{(+)}(\tau; F)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau = F(z), \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где

$$v_{(\pm)}(\tau, F) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{e^{\pm i\tau r} - 1}{\pm ir}\,F\left(r^{1/\rho} e^{\mp i\pi/2\alpha}\right) r^{\mu-1}\,dr.$$

3°. *Формула*

$$L_\rho^*(e^{i\varphi} r^{1/\rho}; F) \equiv r^{1-\mu}\left\{\frac{d}{dr}\left[r^\mu \int_0^\infty E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{i\varphi} r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}; \mu+1\right) v_{(-)}(\tau; F)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right] +\right.$$

$$\left.+ \frac{d}{dr}\left[r^\mu \int_0^\infty E_\rho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} e^{i\varphi} r^{1/\rho}\tau^{1/\rho}; \mu+1\right) v_{(+)}(\tau; F)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\right]\right\} =$$

$$= F(e^{i\varphi} r^{1/\rho}), \quad \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha},\ 0 < r < \infty\right)$$

справедлива для всех r *при* $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ *и почти для всех* r *при* $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$.

В дальнейшем этот результат был существенно дополнен М. М. Джрбашяном, а именно им доказана

Теорема Б. 1°. *Если* $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}$ *и* $\varkappa = \frac{\alpha\rho}{(2\alpha-1)\rho - 2\alpha}$, *то справедливо тождество*

$$L_\rho(z; F) \equiv 0, \quad z \in \Delta(\varkappa, \pi),$$

где $\Delta(\varkappa, \pi)$ *есть область угла*

$$\left\{|\arg z - \pi| < \frac{\pi}{2\varkappa},\ 0 < |z| < \infty\right\}.$$

2°. *Если* $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha - 1}$, *то*

$$L_\rho^*(e^{i\varphi} r^{1/\rho}; F) \equiv 0, \quad |\varphi - \pi| \leqslant \frac{\pi}{2\varkappa}$$

на всей полуоси $(0, \infty)$ *.

Параметрическое представление класса $M_2[\alpha, 0] = M_2[\alpha]$, где $0 < \alpha < \infty$, дано в работе М. М. Джрбашяна совместно с автором**.

* Теорема Б еще не опубликована.

** Находится в печати.

Это представление осуществляется уже с помощью функции Вольтерра

$$\nu(z;\ \mu) = \int_0^\infty \frac{z^{t+\mu}}{\Gamma(t+\mu+1)}\,dt,$$

обладающей важнымы асимптотическими свойствами на всей римановой поверхности

$$G:\{-\infty < \operatorname{Arg} z < \infty,\quad 0 < |z| < \infty\}.$$

В настоящей статье мы устанавливаем, что в представлениях классов $M_2[\alpha, \omega]\left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty,\ -1 < \omega < 1\right)$ и $M_2[\alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$ вместо ядер $E_\rho(z;\ \mu)$ и $\nu(z;\ \mu)$ можно взять значительно более общие ядра, именно обобщенную гипергеометрическую функцию

$$_pF_q(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(k\delta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(k\delta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(k\rho_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(k\rho_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\,z^k \tag{2}$$

в целую функцию вида

$$F(\vartheta;\ \rho_1,\ \mu_1,\ \rho_2,\ \mu_2,\ \rho_3;\ z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{(k+\vartheta)^{k\rho_1^{-1}+\mu_1}\left[\Gamma(k\rho_2^{-1}+\mu_2)\right]^{1/\rho_3}} \tag{3}$$

для класса $M_2[\alpha, \omega]$ и обобщенную функцию типа Вольтерра

$$_p\nu_q(z;\ \mu) = \int_0^\infty \frac{\Gamma(t\beta_1^{-1}+\nu_1)\cdots\Gamma(t\beta_p^{-1}+\nu_p)}{\Gamma(t\alpha_1^{-1}+\mu_1)\cdots\Gamma(t\alpha_{q+1}^{-1}+\mu_{q+1})}\,z^{t+\mu}\,dt \tag{4}$$

для класса $M_2[\alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$.

1. *Параметрическое представление класса*

$$M_2[\alpha, \omega]\left(\frac{1}{2} < \alpha < \infty,\ -1 < \omega < 1\right).$$

Для формулировки теоремы напомним некоторые вспомогательные факты. В работе ([3]) мы рассматривали следующие функции

$$K_\rho(s;\ \mu,\ \varphi) = \frac{\pi\rho\, e^{i\rho(s+\mu-1)(\pi-\varphi)}\,\Psi(s)}{\sin\pi\rho(s+\mu-1)}$$

$$H_\rho^{(\pm)}(s;\ \mu) = e^{\pm i\frac{\pi}{2}s}\left[\Psi(1-s)\right]^{-1},$$

где

$$\Psi(s) = \frac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{\rho}{\delta_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p - \frac{\rho}{\delta_p}(s+\mu-1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1}(s+\mu-1)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{\rho}{\rho_{q+1}}(s+\mu-1)\right)},$$

на параметры налагая ограничения

а) $\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{\rho_1}+\cdots+\dfrac{1}{\rho_{q+1}}-\dfrac{1}{\delta_1}-\cdots-\dfrac{1}{\delta_p}\leqslant 2;$

б) $\mu=\mu_1+\cdots+\mu_{q+1}-\nu_1-\cdots-\nu_p+\dfrac{p-q}{2};$

в) для данного $\rho\geqslant\dfrac{1}{2}$,

$$\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\frac{\pi}{2\rho}.$$

Здесь дополнительно требуем, чтобы

$$\mu_i\rho_i\geqslant 1,\quad \nu_j\delta_j\geqslant 1\ \ (i=1,2,\cdots,q+1, j=1,2,\cdots,p).$$

Нами установлено, что при условии

$$\frac{1}{2}<\mu<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}$$

пределы в среднем

$$\frac{k_\rho(x,\mu,\varphi)}{x}=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{K_\rho(s;\mu,\varphi)}{1-s}x^{-s}\,ds$$

и

$$\frac{h_\rho^{(\pm)}(x,\mu)}{x}=\frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{H_\rho^{(\pm)}(s;\mu)}{1-s}x^{-s}\,ds$$

существуют почти всюду и принадлежат классу $L_2(0,\infty)$. Кроме того, для всех $\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2\rho},\ 2\pi-\dfrac{\pi}{2\rho}\right]$ имеем также

$$k_\rho(x,\mu,\varphi)=\int\limits_0^x {}_pF_q(e^{i\varphi}t^{1/\rho})\,t^{\mu-1}\,dt,$$

где функция ${}_pF_q(z)$ определяется рядом (2), который сходится на всей плоскости z в силу а) и представляет целую функцию порядка ρ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1°. *Класс* $M_2[\alpha,\omega]$ $\left(\dfrac{1}{2}<\alpha<\infty,\ -1<\omega<1\right)$ *совпадает с множеством функций, допускающих представление вида*

$$F(z)=\int\limits_0^\infty {}_pF_q\left(ze^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)}\tau^{1/\rho}\right)\tau^{\mu-1}v_{(-)}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\infty {}_pF_q\left(ze^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)}\tau^{1/\rho}\right)\tau^{\mu-1}v_{(+)}(\tau)\,d\tau,\quad z\in\Delta(\alpha),\tag{1.1}$$

где $v_{(\pm)}(\tau)$ — *произвольные функции из класса* $L_2(0, \infty)$, *при этом*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \cdots + \frac{1}{\rho_{q+1}} - \frac{1}{\delta_1} - \cdots - \frac{1}{\delta_p} \leqslant 2 - \frac{1}{\alpha}$$

и

$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \cdots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \cdots - \nu_p + \frac{p-q}{2} =$$

$$= \frac{1+\omega+\rho}{2\rho} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}.$$

2°. *Если* $F(z) \in M_2[\alpha, \omega]$, *то справедлива формула*

$$L_\rho(z; F) \equiv \int_0^\infty {}_pF_q\left(ze^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)}\tau^{1/\rho}\right)\tau^{\mu-1} v_{(-)}(\tau; F)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^\infty {}_pF_q\left(ze^{-i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}\right)}\tau^{1/\rho}\right)\tau^{\mu-1} v_{(+)}(\tau; F)\, d\tau = F(z) \quad z \in \Delta(\alpha), \tag{1.2}$$

где $v_{(\pm)}(\tau; F)$ *также принадлежат классу* $L_2(0, \infty)$ *и почти всюду на* $(0, \infty)$ *определяются соответственно формулами*

$$v_{(\pm)}(\tau; F) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho}\,\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty \frac{h_\rho^{(\pm)}(r\tau; \mu)}{r} F(r^{1/\rho} e^{\pm i\pi/2\alpha})\, r^{\mu-1}\, dr. \tag{1.3}$$

3°. *Формула*

$$L_\rho^*(e^{i\varphi}r^{1/\rho}; F) \equiv r^{1-\mu}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{k_\rho\left(r\tau;\ \mu;\ \frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{2\rho}+\varphi\right)}{\tau} v_{(-)}(\tau; F)\, d\tau +\right.$$

$$\left. + \frac{d}{dr}\int_0^\infty \frac{k_\rho\left(r\tau;\ \mu;\ -\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\pi}{2\alpha}+\varphi\right)}{\tau} v_{(+)}(\tau; F)\, d\tau = F(e^{i\varphi}r^{1/\rho})\right.$$

$$\left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\alpha},\ 0 < r < \infty\right) \tag{1.4}$$

справедлива для всех r *при* $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ *и почти для всех* r *при* $\varphi = \pm\frac{\pi}{2\alpha}$.

4°. *В случае* $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ *для значений*

$$\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho} \leqslant \psi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{\rho}$$

имеет место равенство

$$L_\rho^*(e^{i\psi}r^{1/\rho}; F) \equiv 0. \tag{1.5}$$

Кроме того, при $\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{\rho}<\arg z<2\pi-\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi}{\rho}$, $0<|z|<\infty$

$$L_\rho(z;\ F)=0. \qquad (1.6)$$

5°. *В случае* $\rho=\frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ *имеем также равенство*

$$L_\rho^*(-r^{1/\rho};\ F)=0 \quad (0<r<\infty). \qquad (1.7)$$

Доказательство пункта 1° вполне аналогично доказательству, которое приводится в работе ([2]). Наметим доказательство остальных пунктов. Пусть $F(z)\in M_2[\alpha,\ \omega]$, тогда известно ([2]), что почти всюду существуют граничные значения $F(r^{1/\rho}e^{\pm i\pi/2\alpha})r^{\mu-1}$ и принадлежат классу $L_2(0,\ \infty)$, где $\mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$. Если $\mathrm{F}_\rho(s,\ \varphi)$ и $\mathrm{F}_\rho^{\pm}(s)\left(\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}\right)$ преобразования Меллина функций $F(r^{1/\rho}e^{i\varphi})r^{\mu-1}$ и $F(r^{1/\rho}e^{\pm i\pi/2\alpha})\times r^{\mu-1}$ соответственно, то сперва мы устанавливаем, что они связаны формулой

$$\mathrm{F}_\rho(s;\ \varphi)=e^{\pm i\rho(s+\mu-1)\left(\frac{\pi}{2\alpha}\mp\varphi\right)}\,\mathrm{F}_\rho^{(\pm)}(s)\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha},\ \mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}\right). \qquad (1.8)$$

Теперь, если $V_{(\pm)}(s;\ F)$ преобразования Меллина функций $v_{(\pm)}(\tau;\ F)$, то легко проверяются тождества

$$K_\rho\left(s;\ 2\pi-\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi}{2\rho}+\varphi\right)V_{(+)}(1-s;\ F)+$$

$$+K_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{2\rho}+\varphi\right)V_{(-)}(1-s;\ F)=\mathrm{F}_\rho(s;\ \varphi)\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha},\ \mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}\right) \qquad (1.9)$$

и

$$K_\rho\left(s;\ -\frac{\pi}{2\rho}-\frac{\pi}{2\alpha}+\psi\right)V_{(+)}(1-s;\ F)+K_\rho\left(s;\ \frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{2\alpha}+\right.$$

$$\left.+\psi\right)V_{(-)}(1-s;\ F)=0,\ \frac{\pi}{2\alpha}+\frac{\pi}{\rho}\leqslant\psi\leqslant2\pi-\frac{\pi}{2\alpha}-\frac{\pi}{\rho}\left(\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}\right). \qquad (1.10)$$

Тождества такого вида для предельного случая $\alpha=\infty$ впервые были установлены М. М. Джрбашяном в работе ([4]). Из тождеств (1.9) и (1.10) следуют остальные утверждения теоремы.

Примечание. Аналогичная теорема справедлива также в том случае, когда в формулах (1.1) — (1.7) функции ${}_pF_q(z)$, $h_\rho^{(\pm)}(x,\ \mu)$, $k_\rho(x,\ \mu,\ \varphi)$ заменены соответственно функциями (3),

$$h^{(\pm)}(x,\ \rho,\ \mu)=\frac{x}{2\pi i}\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{H^{(\pm)}(s,\ \rho,\ \mu)}{1-s}x^{-s}ds,$$

где

$$H^{(\pm)}(s, \rho, \mu) = exp\left\{\pm i\frac{\pi}{2}s + \left[\mu_1 - \frac{\rho}{\rho_1}\left(\mu - s\right)\right]\log\left[\vartheta - \rho\left(\mu - s\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left[\Gamma\left(\mu_2 - \frac{\rho}{\rho_2}\left(\mu - s\right)\right]^{1/\rho_3}$$

и

$$I(x, \rho, \mu, \varphi) = \int_0^x F(\vartheta; \rho_1, \mu_1, \rho_2, \mu_2, \rho_3; t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1}\,dt$$

рассмотренные нами в работе [5]. Относительно параметров полагаем

$$\vartheta \geqslant 1,\ \mu_2\rho_2 \geqslant 1$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2\rho_3} \leqslant 2 - \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{1}{2} < \mu = \mu_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho_2}\left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1 + \omega + \rho}{2\rho} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}.$$

2°. *Параметрическое представление класса* $M_2[\alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$.

Напомним определения некоторых функций, рассмотренных нами в работе [3]. Определение функции $M^{(\pm)}(s)$ дополним следующей формулой

при $\varphi \geqslant \frac{\pi}{2}$

$$M(s; \varphi) =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i e^{-i\varphi s}\dfrac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}, & \operatorname{Im} s < 0 \\ 0, \quad \operatorname{Im} s > 0 \end{cases}$$

при $\varphi \leqslant -\frac{\pi}{2}$

$$M(s; \varphi) =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \operatorname{Im} s < 0 \\ -2\pi i e^{-i\varphi s}\dfrac{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)\cdots\Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)\cdots\Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}(s + \tilde{\mu} - 1)\right)}, \\ \operatorname{Im} s > 0 \end{cases}$$

$$H^{(\pm)}(s) = e^{\pm i\frac{\pi}{2}s} \frac{\Gamma\left(\mu_1 - \frac{1}{\alpha_1}(\bar{\mu} - s)\right) \cdots \Gamma\left(\mu_{q+1} - \frac{1}{\alpha_{q+1}}(\bar{\mu} - s)\right)}{\Gamma\left(\nu_1 - \frac{1}{\beta_1}(\bar{\mu} - s)\right) \cdots \Gamma\left(\nu_p - \frac{1}{\beta_p}(\bar{\mu} - s)\right)}.$$

Относительно параметров полагаем

$$\frac{1}{\alpha_1} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{q+1}} - \frac{1}{\beta_1} - \cdots - \frac{1}{\beta_p} = 1,$$

$$\bar{\mu} = \mu_1 + \cdots + \mu_{q+1} - \nu_1 - \cdots - \nu_p + \frac{p-q}{2}.$$

Справедливы следующие утверждения.

1) Пределы в среднем

$$\frac{m(x, \varphi)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{a \to \infty} \int\limits_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{M(s; \varphi)}{1 - s} x^{-s}\, ds$$

и

$$\frac{h^{(\pm)}(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{a \to \infty} \int\limits_{\frac{1}{2} - ia}^{\frac{1}{2} + ia} \frac{H^{(\pm)}(s)}{1 - s} x^{-s}\, ds$$

существуют почти всюду и принадлежат классу $L_2(0, \infty)$.

2) При $|\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}$, $\bar{\mu} = \frac{1}{2}$ справедлива формула

$$m(x, \varphi) = \int\limits_0^x {}_p\nu_q\left(e^{i\varphi} t;\ -\frac{1}{2}\right) dt,$$

где ${}_p\nu_q(z; \mu)$ определяется формулой (4).

Параметрическое представление класса $M_2[\alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$ дается теоремой.

Теорема 2. 1'. *Класс* $M_2[\alpha]$ $(0 < \alpha < \infty)$ *совпадает с множеством функций, допускающих представление вида*

$$F(z) = \int\limits_0^\infty {}_p\nu_q\left(ize^{i\frac{\pi}{2\alpha}}\tau;\ -\frac{1}{2}\right) v_{(-)}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^\infty {}_p\nu_q\left(-ize^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}\tau;\ -\frac{1}{2}\right) v_{(+)}(\tau)\, d\tau, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

где $v_{(\pm)}(\tau)$ — *произвольные функции из класса* $L_2(0, \infty)$.

Причем

$$\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{q+1}}-\frac{1}{\beta_1}-\cdots-\frac{1}{\beta_p}=1$$

$$\mu_1+\cdots+\mu_{q+1}-\frac{q+1}{2}=\nu_1+\cdots+\nu_p-\frac{p}{2}.$$

2°. *Если* $F(z)\in M_2[\alpha]$, *то справедлива формула*

$$L(z;\,F)\equiv\int\limits_0^\infty {}_p\Psi_q\left(ize^{i\frac{\pi}{2\alpha}}\tau;\,-\frac{1}{2}\right)v_{(-)}(\tau;\,F)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\infty {}_p\Psi_q\left(-ize^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}\tau;\,-\frac{1}{2}\right)v_{(+)}(\tau;\,F)\,d\tau=F(z)\quad z\in\Delta(\alpha),$$

где $v_{(\pm)}(\tau,\,F)$ *также принадлежат классу* $L_2(0,\,\infty)$ *и почти всюду на* $(0,\,\infty)$ *определяются соответственно формулами*

$$v_{(\pm)}(\tau;\,F)=\frac{1}{2\pi}\frac{d}{d\tau}\int\limits_0^\infty\frac{h^{(\pm)}(r\tau)}{r}F\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2\alpha}}\right)dr.$$

3°. *Формула*

$$L^*(e^{i\varphi}r;\,F)\equiv\frac{d}{dr}\int\limits_0^\infty\frac{m\left(r\tau;\,\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\alpha}+\varphi\right)}{\tau}v_{(-)}(\tau;\,F)\,d\tau+$$

$$+\frac{d}{dr}\int\limits_0^\infty\frac{m\left(r\tau;\,-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\alpha}+\varphi\right)}{\tau}v_{(+)}(\tau;\,F)\,d\tau=F(e^{i\varphi}r)$$

$$\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\alpha},\quad 0<r<\infty\right)$$

справедлива для всех r *при* $|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}$ *и почти для всех* r *при* $\varphi=\pm\frac{\pi}{2\alpha}$.

4°. *При* $|\operatorname{Arg} z|>\frac{\pi}{2\alpha}+\pi$ *имеем*

$$L(z;\,F)\equiv 0.$$

Кроме того, при $|\psi|>\frac{\pi}{2\alpha}+\pi$

$$L^*(e^{i\psi}r;\,F)\equiv 0\qquad 0<r<\infty.$$

И в этом случае доказательство основано на легко проверяемых тождествах вида (1.9) и (1.10).

Выражаю благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Անկյունային տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների որոշ դասերի պարամետրական ներկայացումների մասին

Մ. Մ. Ջրբաշյանը և Ա. Ե. Ավետիսյանը (1, 2) *դիտարկել էին*

$$\Delta(\alpha):\left\{|\arg z|<\frac{\pi}{2\alpha},\quad 0<|z|<\infty\right\},\quad \frac{1}{2}<\alpha<\infty$$

անկյան մեջ հոլոմորֆ և

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2\alpha}}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr\right\}<\infty,\ -1<\omega<1$$

պայմանին բավարարող ֆունկցիաների $M_2[\alpha,\omega]$ *դասը։ Նրանց կողմից ստացված է այդ դասի պարամետրական ներկայացումը* (*Թեորեմ* A), *ընդ որում այդ ներկայացումը իրականացնում է Միտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիան՝*

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(k\rho^{-1}+\mu)}.$$

Ներկա աշխատանքում ստացված է, որ այդ ներկայացումը պահում է իր ուժը, երբ կորիզ հանդիսացող Միտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիան փոխարինվում է ավելի ընդհանուր (2) *և* (3) *կորիզներով, պարամետրերի բավական լայն ընտրության դեպքում։ Ստացված է նաև, որ Մ. Մ. Ջրբաշյանի հետ համատեղ աշխատանքում դիտարկված* $M_2[\alpha,0]\equiv M_2[\alpha]$ $(0<\alpha<\infty)$ *դասի պարամետրական ներկայացումը մնում է իրավացի, երբ այդ ներկայացումը իրականացնող Վոլտերայի ֆունկցիան՝*

$$\nu(z;\mu)=\int_0^\infty \frac{z^{t+\mu}}{\Gamma(t+\mu+1)}dt$$

փոխարինվում է Վոլտերայի տիպի ընդհանրացված (4) *ֆունկցիայով։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян* и *А. Е. Аветисян*, ДАН СССР, 120, № 3, 457—460 (1958). [2] *М. М. Джрбашян* и *А. Е. Аветисян*, „Сибирский математический журнал", т. I, № 3, 1960, 383—426. [3] *С. А. Акопян*, „Известия АН АрмССР", серия физ.-мат. наук, XV, № 1 (1962). [4] *М. М. Джрбашян*, „Известия АН СССР", серия матем., 19, 133—190 (1955). [5] *С. А. Акопян*, ДАН АрмССР, XXXIV, № 1 (1962).