ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XL 1965 2

МАТЕМАТИКА

Н. Е. Товмасян

Об одной граничной задаче для эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/VIII 1964)

1. В настоящей работе рассматривается следующая задача: в конечной плоской односвязной области D с границей Γ требуется найти регулярное решение эллиптической системы

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

принадлежащее классу $C_\alpha^1(\bar{D})$ и удовлетворяющее граничному условию

$$a(z)u_x+b(z)u_y+c(z)u=f \text{ на } \Gamma, \tag{2}$$

где $z=x+iy$, $u=(u_1,\cdots,u_n)$ — искомый вектор, $f=(f_1,\cdots,f_n)$ — заданный действительный вектор на Γ, $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ — действительные квадратные матрицы n-го порядка на Γ, A, B, C — действительные постоянные квадратные матрицы n-го порядка.

Пусть $z=t(s)$ — параметрическое уравнение границы Γ, где s — длина дуги. Предполагается, что функция $t(s)\in C_\alpha^3(\Gamma)$, а функция f и элементы матриц $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ принадлежат классу $C_\alpha^1(\Gamma)$.

Мы здесь будем изучать задачу (1) — (2) для тех эллиптических систем, для которых характеристическое уравнение

$$\det\,(A+2B\lambda+C\lambda^2)=0 \tag{3}$$

имеет только простые корни.

Задачу (1)—(2) будем называть нетеровой, если однородная задача (1)—(2) имеет конечное число линейно независимых решений и неоднородная задача разрешима, если функция f подчинена конечному числу условий ортогональности.

Для достаточно широкого класса эллиптических систем задача (1) — (2) изучена в работах [1-5]. В работе [6] получено достаточное условие нетеровости задачи (1) — (2) (условие Я. Б. Лопатинского). Задачи, рассмотренные в работах [1-5], удовлетворяют этому условию. В настоящей работе указывается более общее условие, при выполнении которого задача (1) — (2) приводится к эквивалентному одномерному сингулярному интегральному уравнению нормального типа, доказывается нетеровость этой задачи и получена формула для индекса.

2. Пусть характеристическое уравнение (3) имеет только простые корни. Обозначим через $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ корни этого уравнения с положительными мнимыми частями. Общее решение системы (1) в этом случае можно записать в виде (¹):

$$u = Re\ (\alpha_1 \varphi_1 (z_1) + \cdots + \alpha_n \varphi_n (z_n)), \tag{4}$$

где $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ есть n-мерные постоянные векторы, являющиеся нетривиальными частными решениями уравнений

$$(A + 2B\lambda_k + C\lambda_k^2)\ \alpha_k = 0\ \ (k = 1,2, \cdots, n);$$

$z_j = x + \lambda_j y$; $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)$ — произвольные аналитические функции соответственно в областях $D_1, \cdots, D_n$. Область D_j получается из области D при помощи отображения $\zeta = x + \lambda_j y$. Если $u \in C^1_\alpha(\bar{D})$, то $\varphi_j \in C^1_\alpha(\bar{D}_j)$.

Предположим, что начало координат находится внутри области D. Функции $\varphi_1(z_1), \cdots, \varphi_n(z_n)$ в точке нуль можно подчинить условиям

$$Re\ (\alpha_1 \lambda_1 \varphi_1 (0) + \cdots + \alpha_n \lambda_n \varphi_n (0)) = 0. \tag{5}$$

При этих условиях $\varphi_1(z), \cdots, \varphi_n(z)$ будут определяться единственным образом с помощью $u(x,y)$.

Подставляя общее решение (4) в граничное условие (2), получим

$$Re\ (\beta_1 \varphi_1 (z_1) + \cdots + \beta_n \varphi_n (z_n) + \gamma_1 \varphi_1' (z_1) + \cdots + \varphi_n' (z_n))|_\Gamma = f, \tag{6}$$

где

$$\varphi_j'(z) = \frac{d\varphi_j(z)}{dz}, \quad \beta_j = c\alpha_j, \ \ \gamma_j = (a + \lambda_j b)\alpha_j.$$

$$(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

Наложим на векторы $\gamma_1, \cdots, \gamma_n, \beta_1, \cdots, \beta_n$ следующие условия:

Условие 1. Из векторов $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ можно выбрать векторы $\gamma_{j_1}, \cdots, \gamma_{j_k}$, которые линейно независимы в любой точке $z \in \Gamma$, а остальные линейно зависимы от векторов $\gamma_{j_1}, \cdots, \gamma_{j_k}$.

Если условие 1 выполняется, то перенумеровав корни характеристического уравнения (3) с положительными мнимыми частями, его можно сформулировать в следующем виде: векторы $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$ линейно независимы в любой точке $z \in \Gamma$, а $\gamma_{k+1}, \cdots, \gamma_n$ линейно зависимы от $\gamma_1, \cdots, \gamma_k$. Мы будем использовать условие 1 в последней формулировке.

Определим векторы $\delta_{k+1}, \cdots, \delta_n$ на Γ следующим образом:

$$\delta_j = \beta_j - \sum_{p=1}^{k} c_{jp} \frac{\cos(\nu,y) - \lambda_p \cos(\nu,x)}{\cos(\nu,y) - \lambda_j \cos(\nu,\ x)} \cdot \beta_p, \ \ j = k+1, \cdots, n, \tag{7}$$

где c_{jp} — функции на Γ, определяемые из уравнений

$$\gamma_j = c_{j1}\gamma_1 + \cdots + c_{jk}\gamma_k, \; j = k+1, \cdots, n, \tag{8}$$

а ν — внутренняя нормаль кривой Γ в точке (x,y).

Условие 2. Векторы $\gamma_1, \cdots, \gamma_k, \delta_{k+1}, \cdots, \delta_n$ линейно независимы в любой точке границы Γ.

Если матрицы $a(z)$ и $b(z)$ постоянны, то очевидно, что условие 1 всегда выполняется. Если $k = n$, то условия 1 и условие 2 совпадают и они равносильны условию Я. Б. Лопатинского ([6]).

При соблюдении условия 1 и условия 2 задача (1)—(2) приводится к эквивалентному одномерному сингулярному интегральному уравнению нормального типа, если использовать интегральные представления аналитических функций $\varphi_1(z_1), \cdots, \varphi_n(z_n)$, подобранных следующим образом:

$$\varphi_j(z_j) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu_j(t)\,dt_j}{t_j - z_j} + ic_j, \; j = k+1, \cdots, n, \tag{9}$$

$$\varphi_j(z_j) = \int_\Gamma \mu_j(t)\ln\left(1 - \frac{z_j}{t_j}\right)ds + ic_j + \int_\Gamma \mu_j(t)\,ds +$$

$$+ \sum_{p=k+1}^{n} \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{c_{pj}(t)\,\mu_p'(t)}{t_p'}\ln\left(1 - \frac{z_j}{t_j}\right)dt_j. \tag{10}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, k).$$

Здесь c_{pj} определяются из (8), $\mu_1(t), \cdots, \mu_n(t)$ — действительные функции, $c_1, \cdots, c_n$ — действительные постоянные, i — мнимая единица,

$$\mu_p'(t) = \frac{d\mu_p(t)}{dt}, \; t_j = \xi + \lambda_j\eta, \; t = \xi + i\eta \in \Gamma, \; t_p' = \frac{dt_p}{dt}$$

$$(j, p = 1, 2, \cdots, n).$$

В этих интегральных представлениях величины $\mu_j(t)$ и c_j ($j = 1, 2, \cdots, n$) определяются единственным образом по $\varphi_1(z_1), \cdots, \varphi_n(z_n)$. Использованные здесь интегральные представления аналитических функций $\varphi_j(z_j)$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) являются простыми следствиями интегральных представлений, приведенных в ([8]).

Подставляя интегральные представления аналитических функций $\varphi_j(z_j) = (j = 1, 2, \cdots, n)$ из (9) и (10) в граничное условие (6) и переходя к пределу, когда точка (x,y) стремится к границе области D, для определения функций $\mu_1(t), \cdots, \mu_n(t)$ и постоянных $c_1, \cdots, c_n$ получаем систему сингулярных интегральных уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\tilde{\alpha}_j(t)\,\mu_j(t) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\tilde{\beta}_j(t,\tau)\,\mu_j(\tau)\,d\tau}{t - \tau} - (\operatorname{Im}\beta_j)c_j\right] = f, \tag{11}$$

где $\tilde{\alpha}_j(t)$ и $\tilde{\beta}_j(t, \tau)$ есть n-мерные векторы;

$$\tilde{\alpha}_j(t) = \pi \mathrm{Im}\left(\gamma_j(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}\right), \tilde{\beta}_j(t, t) = -i\pi Re\left(\gamma_j(t)\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}\right), j = 1, \cdots, k,$$

$$\tilde{\alpha}_j(t) = Re\delta_j(t), \ \tilde{\beta}_j(t, t) = i\,\mathrm{Im}\delta_j(t), \ j = k+1, \cdots, n.$$

Система интегральных уравнений (11) эквивалентна нашей задаче в следующем смысле: если задача (1)—(2) имеет решение, то существуют действительные функции $\mu_1(t), \cdots, \mu_n(t)$ и действительные постоянные $c_1, \cdots, c_n$, удовлетворяющие уравнению (11); если существуют действительные функции $\mu_1(t), \cdots, \mu_n(t)$ и действительные постоянные $c_1, \cdots, c_n$, удовлетворяющие уравнению (11), то задача (1)—(2) имеет решение и оно находится при помощи формулы (4), а функции $\varphi_1(z_1), \cdots, \varphi_n(z_n)$ находятся из (9) и (10).

Отсюда, в силу известных теорем теории сингулярных уравнений [8], следует

Теорема. *При выполнении условия* 1 *и условия* 2 *задача* (1)—(2) *нетерова, индекс этой задачи* $2(k-l)$, *где* k *число линейно независимых векторов* $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$, *а* l*—приращение аргумента функции*

$$\Delta(z) = \frac{1}{2\pi} det \begin{Vmatrix} \gamma_{11} \cdots \gamma_{1k} \delta_{1,k+1} \cdots \delta_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_{n1} \cdots \gamma_{nk} \ \delta_{n,k+1} \cdots \delta_{nn} \end{Vmatrix}$$

при обходе z *контура* Γ *один раз в положительном направлении.*

Здесь $\gamma_{1j}, \cdots, \gamma_{nj}$ и $\delta_{1p}, \cdots, \delta_{np}$ ($j = 1, 2, \cdots, k$, $p = k+1, \cdots, n$) являются компонентами векторов γ_j и δ_p соответственно. Индексом задачи (1)—(2) называется разность числа линейно независимых решений однородной задачи (1)—(2) и числа условий разрешимости неоднородной задачи (1)—(2). При вычислении индекса используется также условие (5).

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

Հարթության վրա երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների էլիպտիկ սիստեմի համար մի եզրային խնդրի մասին

Դիտարկված է հետևյալ խնդիրը՝ Γ *եզրագիծ ունեցող վերջավոր հարթ միակապ* D *տիրույթում, պահանջվում է գտնել*

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}C + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

էլիպտիկ սիստեմի ռեգուլյար լուծումը, որը պատկանում է $C^1_\alpha(\bar{D})$ *դասին և բավարարում է* Γ*-ի վրա*

$$a(z)\,u_x + b(z)\,u_y + c(z)\,u = f \qquad (2)$$

եզրային պայմանին, որտեղ $z = x + iy$, $u = (u_1, \cdots, u_n)$ *որոնելի վեկտոր է,* $f = (f_1, \cdots, f_n)$ *—տրված իրական վեկտոր է* Γ*—ի վրա,* $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ *—* n *կարգի իրական քառա-*

կուսային մատրիցներ են Γ-ի վրա, A, B, C —n կարգի իրական հաստատուն քառակուսային մատրիցներ են։

Ցույց է տրվում այն ընդհանուր պայմանը, որի կատարման դեպքում (1)—(2) *խնդիրը բերվում է համազոր միաչափ սինգուլյար նորմալ տիպի ինտեգրալ հավասարմանը։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Бицадзе*, „Сообщ. АН Груз. ССР", 5, № 8 (1944.) [2] *И. Н. Векуа*, Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948. [3] *М. И. Вишик*, О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, Матем. сборник, 29 (71). 3, 1951. [4] *Б. В. Боярский*, ДАН СССР, т. 124, № 1 (1959) [5]. *А. И. Вольперт*, Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем диф. ур. на плоскости. Труды Московского математического общества, т. 10, 1961. [6] *Я. Б. Лопатинский*, Об одном способе приведения граничных задач для системы диф. ур. эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, „Укр. матем. журнал", т. 5, № 2, 1953. [7] *А. В. Бицадзе*, Уравнения смешанного типа, М., 1959. [8] *Н. И. Мусхелишвили*, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946.