ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XL 1965 1

ФИЗИКА

М. Л. Тер-Микаелян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и Б. В. Хачатрян

Дифракционное излучение быстрых частиц

(Представлено 14/VII 1964)

В последнее время в литературе появились работы, посвящённые рассмотрению точных методов расчёта излучения при пролёте зарядов через отверстия и экраны (см., например, ([1—4])). Эти задачи являются обобщением аналогичных задач о дифракции света. Несмотря на полноту и привлекательность точных методов, круг задач, поддающихся точному решению, ограничен, а сами решения требуют сложных вычислений.

Мы хотели бы указать, что для быстрых частиц (когда поле становится эквивалентным набору плоских волн) при решении вышеуказанного рода задач можно использовать простой метод, аналогичный широко известному методу расчёта дифракции световых волн, основанному на принципе Гюйгенса.

Как хорошо известно, приближённый расчёт дифракционных задач рассеяния справедлив, когда длина падающей на препятствие волны λ мала по сравнению с характерными размерами a препятствий (экранов и отверстий). Кроме того, предполагаются малыми и углы отклонения от первоначального направления распространения (малые отклонения от законов геометрической оптики). Таким образом, необходимо выполнение следующих двух условий:

$$\lambda \ll a, \tag{1}$$

$$\vartheta \ll 1. \tag{2}$$

Поскольку процесс излучения можно рассматривать как процесс рассеяния псевдофотонов, то условия (1) и (2) должны быть сохранены. Однако применение принципа Гюйгенса к расчёту излучения имеет некоторые особенности, связанные с зависимостью поля частицы от расстояния до траектории. Для выяснения этого вопроса рассмотрим поле быстро движущейся заряжённой частицы. На расстоянии ρ от траектории и на расстоянии $z = vt$ вдоль траектории оно имеет вид:

$$E_\perp = \gamma \frac{e\rho}{(\rho^2 + v^2 t^2 \gamma^2)^{3/2}}; \quad E_\parallel \ll E_\perp, \quad H \sim E \text{ при } \beta = \frac{v}{c} \sim 1.$$

Здесь $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Если рассмотреть Фурье компоненту от E_1 по времени, то легко видеть, что E_ω очень мало при $\rho > \lambda\gamma$. Это означает, что монохроматическая компонента поля частицы пространственно ограничена и отлична от нуля в круге с радиусом $\rho \sim \lambda\gamma$. Естественно, что частица будет „чувствовать" препятствие (будет излучать) только в том случае, когда $\lambda\gamma \gtrsim a$, в противном случае излучение частоты ω будет сильно подавлено. Следовательно, излучение частоты ω появляется лишь тогда, когда

$$\frac{\lambda}{a} \gtrsim (1 - \beta^2)^{1/2}, \tag{3}$$

и будет тем больше, чем лучше будет выполняться неравенство $(\lambda/a) \gg (1 - \beta^2)^{1/2}$.

Поскольку излучение существенно при больших скоростях и под малыми углами, приближённый метод решения охватывает практически интересную область.

Перейдём теперь к вычислению излучения при помощи принципа Гюйгенса.

Пусть заряжённая частица, движущаяся равномерно вдоль оси z со скоростью $v \sim c$, пролетает через отверстие произвольной формы в экране (или пересекает экран произвольной формы). Траектория заряда перпендикулярна к плоскости отверстия (экрана) — плоскости $z = 0$. В дальнейшем экраны всегда предполагаются плоскими, абсолютно непрозрачными и бесконечно тонкими. Можно обобщить излагаемый здесь метод так, как это делается в оптической модели ядра, чтобы отказатся от последних двух ограничений. Этот вопрос, однако, мы здесь не рассматриваем.

Обозначим через u^0 любую из монохроматических компонент поля частицы в свободном пространстве $\vec{E}^0$ или $\vec{H}^0$ без временного множителя вида $e^{-i\omega t}$ и будем предполагать, что в точках отверстия поле таково, каким оно было бы при отсутствии экрана. Все точки отверстия, согласно принципу Гюйгенса, становятся источником вторичных волн и каждый участок $ds = dx\,dy$ отверстия создаёт в точке наблюдения P поле

$$\text{const} \cdot u^0(x,\ y)\,\frac{e^{i\frac{\omega}{c}R}}{R}\,ds, \tag{1.1}$$

а полное поле в точке P найдём, интегрируя (1.1) по всей площади отверстия s (вообще по части плоскости $z = 0$, не занятой экраном)

$$u = \text{const} \cdot \int\limits_s \frac{u^0(x,\ y)}{R}\,e^{i\frac{\omega}{c}R}\,dx\,dy. \tag{1.2}$$

R — расстояние от элемента отверстия ds до точки P.

В дальнейшем мы будем интересоваться лишь излучением при пролёте через отверстия, так как при пролёте через экраны может возникнуть дополнительное излучение, связанное, например, с торможением частицы.

Выберем начало координат в произвольной точке внутри отверстия, обозначим посредством $\vec{\rho}$ радиус-векторы точек отверстия и посредством R_0 расстояние от начала координат до точки P. Поскольку R_0 много больше размеров отверстия, то

$$R = |\vec{R}_0 - \vec{\rho}| \simeq R_0 - \vec{n}\vec{\rho} \tag{1.3}$$

($\vec{n}$ — единичный вектор в направлении $\vec{R}_0$) и из (1.2) и (1.3) получаем

$$u = A \int\limits_s u^0(x, y) e^{-i\vec{k}\vec{\rho}} ds, \tag{1.4}$$

где $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$, а A некоторая постоянная. Для определения A заметим, что при неограниченном увеличении размеров отверстия формула (1.4) в пределе переходит в обратное Фурье разложение функции $u^0(x, y)$, откуда и находим, что $A = (2\pi)^{-2}$. Так как в точке наблюдения полное поле складывается из поля излучения и поля самой частицы, то для нахождения поля излучения необходимо из суммарного поля вычесть поле частицы, т. е. поле излучения будет равно:

$$u_{rad}(k_x, k_y) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\bar{s}} u^0(x, y) e^{-i\vec{k}\vec{\rho}} ds. \tag{1.5}$$

Здесь $\bar{s} = s_\infty - s$, а s_∞ — плоскость $z = 0$. (В дальнейшем индекс rad мы будем опускать).

Приближённая формула (1.5), полученная из простых и наглядных физических соображений, может быть математически обоснована.

Представим решения уравнения Максвелла в виде

$$\vec{E}^{(n)} = \vec{E}^0 + \vec{E}, \qquad \vec{H}^{(n)} = \vec{H}^0 + \vec{H}.$$

Используя векторный аналог формул Грина [5], в случае плоских экранов получаем формулу (см. также [6])

$$\vec{H}(P) = \frac{ik}{2\pi}\int\limits_{s_\infty} [\vec{z}_0\vec{E}] \frac{e^{ikR}}{R} ds \tag{1.6}$$

($\vec{z}_0$-единичный вектор нормали к плоскости $z = 0$). Используя точное граничное условие

$$E_{x, y} = -E^0_{x, y} \text{ на } \bar{s}$$

и предполагая, что $E_{x, y} = 0$ на s [7], в случае малых углов из формулы (1.6), мы получаем формулу (1.5).

Перейдём теперь к конкретным примерам.

Пусть заряжённая частица на расстоянии r_0 от центра пролетает через круглое отверстие радиуса a в бесконечном экране $(r_0 < a)$. Найдём поля излучения E_x и E_y по формуле (1.5).

При движении по оси z свободные поля имеют вид:

$$E^0_{x,y} = -\frac{ie}{2\pi^2 v} e^{i\frac{\omega}{v}z} \int \frac{k_{x,y} \cdot e^{i(xk_x + yk_y)}}{k_x^2 + k_y^2 + \alpha^2} dk_x\, dk_y; \quad \alpha^2 = \frac{\omega^2}{v^2 \gamma^2} \tag{2.1}$$

или (что эквивалентно (2.1))

$$E^0_{x,y} = \frac{e\alpha}{\pi v} e^{i\frac{\omega}{v}z} \frac{x,\ y}{\sqrt{x^2+y^2}} K_1(\alpha \cdot \sqrt{x^2+y^2}); \quad \alpha > 0, \tag{2.2}$$

где K_1 функция Ганкеля от мнимого аргумента.

Выберем начало координат в центре отверстия, а ось x направим вдоль линии, соединяющей начало координат с точкой пересечения траектории частицы с плоскостью $z = 0$-плоскостью отверстия. Введём ещё и полярную систему координат: $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$. Тогда, используя формулы сложения для цилиндрических функций ([8]), после несложных, но довольно длинных вычислений получаем

$$E_x = -\frac{e}{2\pi^2 c} \frac{qa}{q^2+\alpha^2} \frac{\partial}{\partial r_0} P_0(r_0, \psi), \tag{2.3}$$

$$E_y = \frac{e}{2\pi^2 c} \frac{qa}{q^2+\alpha^2} \frac{\partial}{r_0 \partial \psi} P_0(r_0, \psi), \tag{2.4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} P_0(r_0, \psi) &= \sum_{n=0} C_n I_n(\alpha r_0) \Big| J_{n-1}(qa) K_n(\alpha a) + \\ &+ \frac{\alpha}{q} J_n(qa) K_{n-1}(\alpha a) \Big| \cos n\psi \\ C_n &= \begin{cases} 1\ , & \text{при} \quad n = 0 \\ 2(-i)^n, & \text{при} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

I_n-функция Бесселя от мнимого аргумента, $q = k \sin\vartheta$-проекция волнового вектора на плоскость $z = 0$, ϑ-угол излучения относительно оси z, а ψ-угол между $\vec{q}$ и осью x.

Зная поля излучения, можем найти угловое распределение излучения. Ввиду громоздкости формул приведем результат для числа излученных квантов частоты ω при пролете одного электрона (для случая $\alpha a \ll 1$ и $r_0 \ll a$). Он имеет вид

$$N_\omega\, d\omega\, d\vartheta = \frac{e^2}{\pi \hbar c} \frac{\vartheta^3}{\left(1 - \beta^2 + \vartheta^2\right)^2} \left| J_0^2(qa) + \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 J_1^2(qa) \right| \frac{d\omega}{\omega} d\vartheta. \tag{2.6}$$

Результаты при $r_0 = 0$ совпадают с результатами работы [9]. Кроме того, имеем (при $\alpha a \ll 1$)

$$E_x = \frac{ie}{2\pi^2 c}\frac{q}{q^2+\alpha^2}J_0(qa)\cos\psi, \tag{2.3'}$$

$$E_y = \frac{ie}{2\pi^2 c}\frac{q}{q^2+\alpha^2}J_0(qa)\sin\psi. \tag{2.4'}$$

Формулы (2.3′) и (2.4′) определяют поляризацию излучения: электрический вектор лежит в плоскости, содержащей векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$.

Пусть теперь заряжённая частица пролетает через щель шириной a в непрозрачном экране. Траектория частицы перпендикулярна плоскости щели - плоскости $z = 0$. Выберем начало координат в точке пересечения траектории частицы с плоскостью щели, а ось x направим параллельно её краям. Расстояния от начала координат до краёв щели обозначим через a_1 и a_2 $(a_1 + a_2 = a)$.

Из формул (1.5) и (2.1) находим поля излучения

$$E_x(k_x, k_y) = \frac{iek_x}{4\pi^2 cf}\left[\frac{e^{-a_1(f-ik_y)}}{f-ik_y} + \frac{e^{-a_2(f+ik_y)}}{f+ik_y}\right], \tag{3.1}$$

$$E_y(k_x, k_y) = \frac{e}{4\pi^2 c}\left[\frac{e^{-a_1(f-ik_y)}}{f-ik_y} - \frac{e^{-a_2(f+ik_y)}}{f+ik_y}\right], \tag{3.2}$$

где $f = \sqrt{k_x^2 + \alpha^2}$, $k_x = k\sin\vartheta\cos\varphi$, $k_y = k\sin\vartheta\sin\varphi$; ϑ—полярный, φ—азимутальный угол.

Для числа излученных квантов с энергией $\hbar\omega$ отсюда получаем

$$N_\omega\, d\omega\, d\Omega = \frac{e^2}{8\pi^2\hbar c}\frac{k^2}{f^2(f^2+k_y^2)}\Big\{(f^2+k_x^2)(e^{-2fa_1}+e^{-2fa_2}) - $$

$$- 2\frac{\alpha^2 e^{-af}}{f^2+k_y^2}\left[(f^2-k_y^2)\cos ak_y - 2fk_y\sin ak_y\right]\Big\}\frac{d\omega}{\omega}d\Omega. \tag{3.3}$$

$d\Omega$—телесный угол.

Когда a_1 (или a_2) стремится к бесконечности, то задача сводится к задаче об излучении при перпендикулярном пролёте рядом с плоскостью. Интегрируя по частотам, мы получаем результат, совпадающий с результатом работы [1], если в последнем рассмотреть малые углы и перпендикулярный пролёт.

Объединенная радиационная лаборатория
Ереванского государственного университета
и Академии наук Армянской ССР

Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, Հայկական ՍՍՌ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ի. Բ. Վ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Արագ մասնիկների դիֆրակցիոն ճառագայթումը

Աշխատանքում, հենվելով Հյույգենսի սկզբունքի վրա, մշակված է արագ շարժվող լիցքավորված մասնիկների ճառագայթման հաշվման մոտավոր եղանակ այն դեպքերի համար, երբ մասնիկը հատում է կամայական ձև ունեցող մետաղական էկրանը, կամ անցնում է մետաղական էկրանների վրա գտնվող և կամայական ձև ունեցող անցքի միջով: Էկրանները ենթադրվում են հարթ, բացարձակ անթափանց և բացարձակ բարակ:

Ստացված ընդհանուր բանաձևը կիրառված է 2 մասնավոր դեպքերի համար՝

1. Մասնիկը թռչում է a շառավիղ ունեցող կլոր անցքի միջով՝ կենտրոնից r_0 հեռավորության վրա.

2. Մասնիկը թռչում է a լայնություն ունեցող անվերջ երկար ճեղքի միջով:

Ստացված բանաձևերի սահմանային դեպքերը համեմատվում են (1 և 9) աշխատանքների համապատասխան բանաձևերի հետ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Казанцев, Г. И. Сурдутович*, ДАН СССР, 147, 74 (1962). [2] *Д. М. Седракян*, „Известия АН АрмССР" (серия физ.-мат. наук), 16, 115 (1963). [3] *Б. М. Болотовский, Г. В. Воскресенский*, ЖТФ 34, 11 (1963). [4] *Д. М. Седракян* „Изв. АН АрмССР" (серия физ.-мат. наук), 17, 113 (1964). [5] *Дж. А. Стреттон*, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М.—Л., 1948. [6] *Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров*, ДАН СССР, 124, 792 (1959). [7] *П. Парзен, Г. Номикос*, I. Appl. Phys. 33, 2640 (1962). [8] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962. [9] *Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров*, ДАН СССР, 124, 1026 (1959).