ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XL 1965 1

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

О двумерных поверхностях D_2, вложенных в эвклидово пространство E_4.

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 30/IV 1964)

1. Рассмотрим поверхность X_2, вложенную в эвклидово пространство E_4. Пусть

$$x = x(u^1,\ u^2).$$

Параметрическое уравнение поверхности X_2. Если X, Y единичные и взаимно перпендикулярные нормальные векторы поверхности, то ее основные дифференциальные уравнения принимают следующий вид:

$$\nabla_j x_i = h_{ij} X + k_{ij} Y,\quad X_i = -h_i^e x_e + a_i Y,\quad Y_i = -K_i^e x_e - a_i X. \qquad (1)$$

где $h_{ij} = -\partial_i x\, \partial_j X = X \nabla_j x_i$, $k_{ij} = -\partial_i x\, \partial_j Y = Y \nabla_j x_i$, а ∇ символ ковариантного дифференцирования во внутренней римановой связности, метрический тензор которого используется для перебрасывания индексов.

Составим теперь условия интегрируемости системы (1), принимая во внимание, что в бинарной области альтернацию можно заменить свертыванием с бивектором ε^{ij}, а для всякого векторного поля справедливо тождество ((1) § 81, (3)) $\varepsilon^{ij} \nabla_k \nabla_j v_i = K \varepsilon_k^e v_e$, где K—гауссова кривизна.

Эти условия сводятся к следующим:

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & K \varepsilon_j^e = \varepsilon^{kj} (h_{ij} h_k^e + k_{ij} k_k^e). \\
\text{II.} & \varepsilon^{jk} (\nabla_k h_{ij} - a_k k_{ji}) = 0, \\
\text{II.} & \varepsilon^{jk} (\nabla_k k_{ij} + a_k h_{ij}) = 0, \\
\text{V.} & \varepsilon^{jk} (\nabla_k a_j - h_j^e k_{ke}) = 0,
\end{array}\right| \qquad (2)$$

Условия (2·1) равносильны следующему, которое получим, свертывая обе их части с бивектором ε^{ij}.

$$2k = \varepsilon^{im} \varepsilon^{jn} (h_{ij} h_{mn} + k_{ij} k_{mn}) \quad \text{или} \quad k = \underset{h}{N} + \underset{k}{N}, \qquad (3)$$

где

$$\underset{h}{N} = \frac{1}{2}\varepsilon^{im}\varepsilon^{jn} h_{ij} h_{mn}, \qquad \underset{k}{N} = \frac{1}{2}\varepsilon^{im}\varepsilon^{jn} k_{ij} k_{mn}.$$

Теперь вычислим Чебышевский вектор сети h_{ij}. Если обозначим его через t_i, то из ((1), § 53 (9)) и (2) следует, что

$$t_i = \overset{\vee}{h}{}^{pq} \Delta_{[p} h_{i]q} + \frac{1}{4} \overset{\vee}{h}{}^{pq} \Delta_i h_{pq} = \frac{1}{4} \partial_i \ln \underset{h}{N} + \overset{\vee}{h}{}^{pq} k_{q[i} a_{p]} \quad \text{или}$$

$$t_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln \underset{h}{N} + C^p_{[i} a_{p]}, \text{ где аффинор } C^p_i = \overset{\vee}{h}{}^{pq} k_{qi}. \tag{3}$$

Аналогично, если Чебышевский вектор сети k_{ij} обозначим через τ_i, то получим

$$\tau_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln \underset{k}{N} - Q^p_{[i} a_{p]}, \quad \text{где аффинор} \quad Q^p_i = \overset{\vee}{k}{}^{pq} h_{qi}. \tag{4}$$

Если сложим выражения (3) и (4), то получим

$$t_i + \tau_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln (\underset{h}{N}\underset{k}{N}) + C^p_{[i} a_{p]} - Q^p_{[i} a_{p]}. \tag{5}$$

Легко видеть, что между аффинорами C^p_i и Q^p_i имеется следующая связь

$$C^p_i = -\frac{\underset{k}{N}}{\underset{h}{N}} Q^p_i + \frac{\underset{hk}{H}}{\underset{h}{N}} \delta^p_i, \text{ где } \underset{hk}{H} = \varepsilon^{pq}\varepsilon^{mn} h_{pm} k_{qn}.$$

Подставляя выражения C^p_i в (5), получим

$$t_i + \tau_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln (\underset{h}{N}\underset{k}{N}) + \frac{\underset{hk}{H}}{\underset{h}{N}} a_i - \frac{K}{\underset{h}{N}} Q^p_i a_p. \tag{6}$$

Для того, чтобы последнее выражение было градиентным, должно выполняться условие

$$\varepsilon^{ij} \nabla_j \left[\frac{\underset{hk}{H}}{\underset{k}{N}} a_i - \frac{K}{\underset{h}{N}} Q^p_i a_p \right] = 0. \tag{7}$$

2. Допустим, что X_2 можно дополнить до гиперполосы так, чтобы характеристики семейства касательных гиперплоскостей были перпендикулярны к касательной плоскости поверхности. Очевидно, что тогда естественная нормализация X_2 будет одновременно и двойственной ([2]). Поверхности X_2, допускающие двойственную нормализацию, образуют некоторый класс, который в дальнейшем обозначим через D_2. Тогда для поверхности D_2 уравнение (1) принимает следующий вид

$$\Delta_j x_i = h_{ij} X + k_{ij} Y, \quad X_i = -h^r_i x_r, \quad Y_i = -k^r_i x_r,$$

где X, Y обозначают соответственно нормальный вектор касательной гиперплоскости и вектор характеристической прямой.

Из (3) и (4) следует, что для поверхности D_2 Чебышевские векторы тензоров h_{ij}, k_{ij} градиентны. Легко видеть, что обратное имеет место только при выполнении условия (7).

Мы можем формулировать следующее:

Теорема: *Для того, чтобы поверхность X_2, вложенная в E_4, была D_2, необходимо и достаточно, чтобы Чебышевские векторы тензоров h_{ij}, k_{ij} были градиентными и выполнялось условие* (7).

3. Выберем на поверхности X_2 какую-либо кривую, проходящую через точку M. Обозначая через s длину дуги кривой, то будем иметь $x' = x_i v^i$, где $v^i = \dfrac{du^i}{ds}$. Дифференцируя последние выражения по s и пользуясь (1), получим

$$x'' = h_{ij} v^i v^j X + k_{ij} v^i v^j Y + x_i (v^i)'.$$

Проекцию вектора кривизны x'' на нормальную плоскость мы назовем вектором нормальной кривизны и обозначим через $\varkappa$. Этот вектор рассматривал Э. Картан в работе ([3]). По определению имеем

$$\varkappa = h_{ij} v^i v^j X + k_{ij} v^i v^j Y. \tag{8}$$

Пусть MP вектор нормальной кривизны. x, y-координаты точки P в нормальной плоскости $\{X, Y\}$. Э. Картан доказал ([3]), что геометрическим местом точек $P(x, y)$ будет эллипс с центром $H\left\{\dfrac{h_{11}+h_{22}}{2}, \dfrac{k_{11}+k_{22}}{2}\right\}$ — эллипс индикатрисы нормальной кривизны.

Поставим следующую задачу — выяснить, что представляет собой индикатриса нормальной кривизны поверхности D_2. Так как для поверхности D_2 главные направления тензоров h_{ij}, k_{ij} совпадут в ([4]), то это главное направление назовем главным направлением поверхности в точке M.

Обозначим орты главных направлений через $(a_i, \bar{a}_i)$; тогда

$$h_{ij} = \sigma_1 a_i a_j + \sigma_2 \bar{a}_i \bar{a}_j, \quad k_{ij} = \tau_1 a_i a_j + \tau_2 \bar{a}_i \bar{a}_j, \tag{9}$$

где (σ_1, σ_2), (τ_1, τ_2) — главные значения тензоров h_{ij}, k_{ij} соответственно. Разложим единичный касательный вектор v^i кривой в данной точке по главным направлениям:

$$v^i = a^i \cos\varphi + \bar{a}^i \sin\varphi.$$

Подставляя это выражение в (8) и имея в виду (9), получаем

$$h_{ij} v^i v^j = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi, \quad k_{ij} v^i v^j = \tau_1 \cos^2\varphi + \tau_2 \sin^2\varphi.$$

$$MP = (\sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi) X + (\tau_1 \cos^2\varphi + \tau_2 \sin^2\varphi) Y.$$

$$
\left.\begin{aligned} x &= \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi \\ y &= \tau_1 \cos^2\varphi + \tau_2 \sin^2\varphi \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x - \sigma_1 &= (\sigma_2 - \sigma_1)\sin^2\varphi \\ y - \tau_1 &= (\tau_1 - \tau_2)\cos^2\varphi \end{aligned}
$$

Из последнего получаем

$$
x(\tau_1 - \tau_2) + y(\sigma_2 - \sigma_1) = \sigma_2\tau_1 - \tau_2\sigma_1.
$$

Таким образом, мы получаем, что для поверхности D_2 эллипс индикатрисы кривизны вырождается в отрезок прямой, и его центр совпадает с серединой этого отрезка. В случае, когда эта прямая проходит через точку M, т. е. $\sigma_2\tau_1 - \tau_2\sigma_1 = 0$, получается, что D_2 лежит в E_3.

Ереванский государственный университет

Ա. Վ. ՉԱԿՄԱԶՅԱՆ

Էվկլիդյան E_4 տարածությունում ընկղմված D_2 մակերևույթների մասին

Այս հոդվածը նվիրված է երկակի նորմալացված D_2 մակերևույթի ուսումնասիրությանը, որը ընկղմված է չորս չափանի էվկլիդյան E_4 տարածությունում:

Ապացուցված է հետևյալը. որպեսզի X_2 մակերևույթը, որը ընկղմված է E_4 լինի D_2 անհրաժեշտ և բավարար է h_{ij}, k_{ij} տենզորների Չեբիշևյան վեկտորներն լինեն զրոյական և բացի դրանից տեղի ունենան (7) պայմանը:

Է. Կարտանը (3) ներմուծում է մակերևույթի նորմալ կորության ինդիկատրիսի գաղափարը: Նա ապացուցում է, որ X_2 մակերևույթի համար այդ ինդիկատրիսը հանդիսանում է էլիպս, որի կենտրոնը գտնվում է կետում $H\left\{\frac{h_{11}+h_{22}}{2}, \frac{k_{11}+k_{22}}{2}\right\}$.

D_2 մակերևույթի համար այդ կորության ինդիկատրիսի էլիպսը վերածվում է ուղիղի հատվածի և նրա կենտրոնը համընկնում է այդ հատվածի միջնակետին:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. П. Норден.* Теория поверхностей, Гостехиздат, 1956. [2] *А. В. Чакмазян.* Дан Арм ССР, т. 28, № 4 (1959). [3] *Э. Картан.* Риманова геометрия в ортогональном репере, МГУ, 1960. [4] *А. В. Чакмазян.* Дан Арм. ССР, т. 36, № 2 (1962).