

Ю. М. Айвазян

Излучение от открытого конца системы полубесконечных идеально проводящих полуплоскостей

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. М. Кочаряном 2/VI 1964)

Определено излучение, возникающее при вылете заряженной частицы из системы полубесконечных идеально проводящих пластин. Рассмотрен предельный случай, при котором расстояние между пластинами стремится к 0. Возникающее в этом случае излучение будет переходным излучением при вылете частицы из среды, проводимость которой в одном направлении бесконечна, а в другом равна нулю.

Система полубесконечных пластин описывается уравнениями $y = (2n + 1)b$, $n = 0, \pm 1, \pm \dots$, $x < 0$, $-\infty < z < \infty$. Расстояние между соседними полуплоскостями равно $2b$. Для простоты рассмотрим случай, когда частица с зарядом e вылетает по оси x с постоянной скоростью v и в момент времени $t = 0$ находится в начале координат.

Рассмотрим область $(2n - 1)b < y < (2n + 1)b$, т. е. область n -го волновода и его продолжение. В этой области будем искать поля E_x и E_z , которые в силу граничных условий должны обращаться в 0 на стенках n -го волновода. Для сокращения записи будем эти поля записывать в виде $E_{n,xz}$. Представим $E_{n,xz}$ в виде интеграла

$$E_{n,xz}(x, z, \xi) = \int_{-\pi}^{\pi} E_{n,xz,\mu}(x, z, \xi) d\mu = \int_{-\pi}^{\pi} E_{n,xz}(x, z, \xi) e^{i\mu n} d\mu, \quad (1)$$

где $\xi = y - 2nb$.

Из этого разложения следует, что

$$E_{n+1,\mu}(\xi) = E_{n,\mu}(\xi) e^{i\mu}. \quad (2)$$

Будем искать $E_{n,xz,\mu}(x, z, \xi)$ в виде $\tilde{E}_{n,xz,\mu}(x, z, \xi) + E_{n,xz,\mu}^0(x, z, \xi)$, где

$$E_{n,xz,\mu}^0(x, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} E_{x,z}^0(x, z, \xi) e^{i\mu n}, \quad (3)$$

а $E_{x,z}^0(x, z, \xi)$ есть поле движущейся частицы в бесконечном волно-

воде $-b \leq \xi = y < b$, $-\infty < x, z < \infty$. Для $E_{x,z,\omega}^\circ(x, z, \xi)$ легко получить следующее выражение

$$E_{x,z,\omega}^\circ(x, q, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int E_{x,z}^\circ(x, z, \xi, t) e^{i\omega t + i q z} dz dt, \quad (4)$$

$$E_{x,z}^\circ(x, q, \xi, t) = R_{x,z} \left(e^{-l|\xi|} - \frac{\operatorname{ch} l\xi}{\operatorname{ch} lb} l^{-lb} \right) e^{i \frac{\omega}{v} x}, \quad (5)$$

где

$$l = \sqrt{q^2 + k^2 \gamma^2}, \quad k = \frac{|\omega|}{c}, \quad \gamma^2 = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c},$$

$$R_x = -\frac{i\omega e \gamma^2}{2\pi l c^2}, \quad R_z = \frac{ieq}{2\pi l v}.$$

Очевидно, что $E_{x,z}^\circ(x, z, \pm b) = 0$, $\bar{E}_{n,xz,\mu}(x, z, \xi)$ ищем в виде

$$\bar{E}_{n,xz,\mu}(x, z, \xi) = \int \bar{E}_{n,xz,\mu}(x, q, \xi) e^{-i\alpha x - i q z - i\omega t} d\alpha dq d\omega, \quad (6)$$

так как $\bar{E}_{n,xz,\mu}(x, z, \xi)$ должно удовлетворять однородному уравнению Даламбера, то $\bar{E}_{n,xz,\mu}(x, q, \xi)$ ищется в виде $A_n e^{\lambda \xi} + B_n e^{-\lambda \xi}$, где A_n и B_n функции от α , а $\lambda^2 = \alpha^2 - p^2$, $p^2 = k^2 - q^2$, $\operatorname{Im} k = \delta > 0$. Из условия непрерывности $E_{n,xz}(x, z, b) = E_{n+1,xz}(x, z, -b)$ и (2) получается связь между коэффициентами A_n и B_n

$$B_n = C A_n, \quad C = \frac{e^{-\lambda b + i\mu} - e^{\lambda b}}{e^{-\lambda b} - e^{\lambda b + i\mu}}. \quad (7)$$

В силу условия (2) сшивки должна производиться только лишь на одной пластине, аналогично тому, как это делалось в (1). При этом получаются функциональные уравнения типа Винера—Хопфа, которые решаются точно. В результате для полей $\bar{E}_x$ и $\bar{E}_z$ в области $(2n-1)b < y < (2n+1)b$ получим следующие выражения

$$\bar{E}_{x,z,\omega}(x, y, z) = \int e^{-i q z - i \alpha x} dq d\alpha \int_0^\pi d\mu \frac{\zeta_n(\lambda) e^{\lambda(y-2nb)} + \zeta_{-n}(\lambda) e^{-\lambda(y-2nb)}}{\operatorname{sh} 2\lambda b K^-\left(\mu, -\frac{\omega}{\sigma}\right) K^+(\mu, \alpha)} Q_{x,z}, \quad (8)$$

где

$$Q_x = -\frac{bl}{4\pi^2 i \operatorname{ch} lb} \left(\frac{R_x}{\alpha + \frac{\omega}{v}} + \frac{-R_x + \frac{q}{p} R_z}{-p + \frac{\omega}{v}} \right), \quad Q_z = -\frac{bl R_z}{4\pi^2 i \operatorname{ch} lb},$$

$$K^\pm(\mu, \alpha) = (1 - \cos \mu)^{1/2} e^{\pm i \frac{2ba}{\pi} \ln 2} \left[\left(1 - \frac{4b^2 p^2}{\mu^2} \right)^{1/2} \mp \frac{2ba}{|\mu|} \right] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\left[\left(1 - \frac{4b^2 p^2}{\lambda_j^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2ba}{\lambda_j} \right] \left[\left(1 - \frac{4b^2 p^2}{\gamma_j^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2ba}{\gamma_j} \right]}{\left[\left(1 - \frac{4p^2 b^2}{(\pi j)^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2ba}{\pi j} \right]} \quad (10)$$

$$\lambda_j = 2\pi j + \mu, \quad \gamma_j = 2\pi j - \mu, \quad \lambda_0 = |\mu|, \quad (11)$$

$$\zeta_n(\lambda) = [\cos \mu n + \cos \mu (n+1)] e^{\lambda b} - [\cos \mu n + \cos \mu (n-1)] e^{-\lambda b}.$$

Компонента поля $\bar{E}_{y, \omega}$ находится из уравнения $\operatorname{div} E = 0$. Отметим, что при получении (8) нами были использованы условия на ребре $p \sim x^{-1/2}$, $j_x \sim x^{1/2}$, $j_z \sim x^{-1/2}$.

При $x < 0$ в (8) подынтегральное выражение не имеет точки ветвления по α . Поэтому интегрирование по α сводится к вычислению полюсов подынтегрального выражения в нулях $\operatorname{sh} 2\lambda b$. Таким образом, получаются генерированные собственные волноводные волны. Из-за ограниченности места приводить их точное выражение мы не будем.

При $x > 0$ на больших расстояниях от начала координат в (8) проводится дважды интегрирование по методу перевала по α и по q . Приведем формулу, по которой можно сразу писать результат такого интегрирования. При $y < 0$

$$\int f(q, \alpha, p, \lambda) e^{-i\alpha x \mp \lambda y - i q z} d\alpha dq = \quad (11)$$

$$= -2k\pi i f(-k \cos \theta, -k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta, \mp i k \sin \theta \sin \varphi) \sin \varphi \sin \theta \frac{e^{ikR}}{R},$$

при $z = R \cos \theta$, $r = R \sin \theta$, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ необходимо отметить, что при таком интегрировании необходимо также учитывать полюса в (8) при $-\frac{\omega}{v}$. Вклад от этих полюсов плюс нулевое поле задачи, которое необходимо учитывать при $n=0$, дают поле нити в пустоте. Остаточное интегрирование по μ проводится аналогично тому, как это делалось в (1).

Приведем выражение для интенсивности электромагнитного излучения в свободное пространство, т. е. при $x > 0$. Для

$$I_{\omega}(\varphi, \theta) = cR^2 \{ |E_{x, \omega}|^2 + |E_{y, \omega}|^2 + |E_{z, \omega}|^2 \} \quad (12)$$

будем иметь следующее выражение

$$I_{\omega}(\varphi, \theta) = \frac{4k^4 b^4 \beta^2 e^2}{\pi^2 c} \frac{\sin^6 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 (bk \sin \theta \sin \varphi)}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{kb}{\beta} \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \right) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^2} \times$$

$$\times \frac{[(1 - \cos \varphi)^2 (1 + \beta \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi]}{\left| \tilde{K}^- \left(\sigma, -\frac{\omega}{v} \right) \tilde{K}^+ \left(\sigma, -k \sin \theta \cos \varphi \right) \right|^2}, \quad (13)$$

где

$$\bar{K}^{\pm}(\mu, \alpha) = \frac{K^{\pm}(\mu, \alpha)}{\left[\left(1 - \frac{4b^2 p^2}{\lambda_j^2} \right)^{1/2} \mp i \frac{2b\alpha}{\lambda_j} \right]}, \quad (14)$$

а $\sigma = 2\pi j - 2kb \sin \theta \sin \varphi$ при $2j\pi < 2bk \sin \theta \sin \varphi < (2j+1)\pi$. При $(2j-1)\pi < 2kb \sin \theta \sin \varphi < 2j\pi$, $\sigma = 2kb \sin \theta \sin \varphi - 2\pi j$. В этом случае в определении $\bar{K}^{\pm}(\mu, \alpha)$ вместо λ_j нужно поставить γ_j .

Рассмотрим теперь интересный предельный случай формулы (13) при $b \rightarrow 0$. В случае для интенсивности излучения будем иметь

$$I_{\omega}(\varphi, \theta) = \frac{\beta^2 e^2}{\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi)^2} \left\{ \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} (1 + \beta \sin \theta)^2 + \cos^2 \theta \right\}. \quad (15)$$

Это есть формула для интенсивности переходного излучения заряженной частицы, вылетающей с постоянной скоростью из среды, имеющей нулевую проводимость вдоль оси y и бесконечную проводимость вдоль осей x и z .

Центральная научно-исследовательская
физико-техническая лаборатория
Академии наук Армянской ССР

ՅՈՒ. Մ. ԱՅՎԱԶՅԱՆ

Կիսաանվերջ լիցեալակաճ հաղորդիչ թիթեղների սիսեմի ճառագայթումը

Աշխատանքում ուսումնասիրված է կիսաանվերջ հարթ ալիքատարների սիսեմի ճառագայթումը, երբ նրանցից մեկից դուրս է թռչում լիցեալորված մասնիկը: Ստացված է ճառագայթման ինտենսիվության բանաձևը ալիքատարներից դուրս տարածության մեջ: Ուսումնասիրված է այն սահմանային դեպքը, երբ կիսաանվերջ հարթությունների միջև եղած հեռավորությունը ձգտում է զրոյի:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Е. В. Бакланов, ДАН СССР, 153, 570 (1963).