

М. А. Задоян

Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13/IV 1964)

Уравнения теории идеально пластического течения при критерии пластичности Губера—Мизеса в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0,$$

$$(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6(\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{rz}^2) = 6k^2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \lambda (2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_z),$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \lambda (2\sigma_\theta - \sigma_z - \sigma_r), \quad (3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \lambda (2\sigma_z - \sigma_r - \sigma_\theta),$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = 6\lambda \tau_{r\theta},$$

$$2\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 6\lambda \tau_{\theta z}, \quad (4)$$

$$2\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = 6\lambda \tau_{rz}.$$

Из зависимости (3) — (4) будем иметь

$$u(r, \theta, z) = u_0(\theta, z) - \int_r^r (\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) dr, \quad (5)$$

$$v(r, \theta, z) = \frac{r}{r_1} v_0(\theta, z) - r \int_{r_1}^r \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} d\xi + 2r \int_{r_1}^r \gamma_{r\theta} \frac{d\xi}{\xi}, \quad (6)$$

$$w(r, \theta, z) = w_0(\theta, z) - \int_{r_1}^r \frac{\partial u}{\partial z} dr + 2 \int_{r_1}^r \gamma_{rz} dr, \quad (7)$$

где u_0, v_0, w_0 — произвольные функции от θ и z , а r_1 — заданное значение r .

Полагая, что тензор скоростей деформации не зависит от координат θ и z , из (3) — (7) получим

$$r\epsilon_\theta + \int_{r_1}^r \epsilon_\theta dr = B_0 r_1 + B_1 \frac{r_1^2}{2} + u_0 + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_0}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta^2} - B_0 r_1 \right) \frac{r}{r_1} - B_1 \frac{r^2}{2} = A_0 + A_1 r - B_1 \frac{r^2}{2}, \quad (8)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w_0}{\partial z} + r_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} r = B_0 + B_1 r, \quad (9)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial z} \right) \frac{r}{r_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \theta \partial z} \right) \frac{r_1}{r} = C_1 r + \frac{C_0}{r}, \quad (10)$$

где $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1$ — произвольные постоянные.

Приравнявая в соотношениях (8) — (10) коэффициенты при различных степенях r и интегрируя полученные уравнения, находим $B_1 = 0$,

$$u_0(\theta, z) = A_0 - B_0 r_1 + G_1 \cos \theta + G_2 \sin \theta + (E_1 \cos \theta + E_2 \sin \theta) z, \quad (11)$$

$$v_0(\theta, z) = D_1 r_1 + (A_1 + B_0) r_1 \theta - G_1 \sin \theta + G_2 \cos \theta +$$

$$+ (2r_1 C_1 - E_1 \sin \theta + E_2 \cos \theta) z, \quad (12)$$

$$w_0(\theta, z) = D_2 + B_0 z + 2C_0 - r_1 (E_1 \cos \theta + E_2 \sin \theta); \quad (13)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_0}{r_1} + \frac{A_1}{2} \right) \frac{r_1^2}{r^2}, \quad \epsilon_z = B_0, \quad \gamma_{\theta z} = C_1 r + \frac{C_0}{r}. \quad (14)$$

Здесь $D_1, D_2, E_1, E_2, G_1, G_2$ — новые произвольные постоянные. Из соотношений (3) — (4) следует

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2\epsilon_\theta + \epsilon_z}{\gamma_{r\theta}} \tau_{r\theta}, \quad \sigma_z = \sigma_r + \frac{\epsilon_\theta + 2\epsilon_z}{\gamma_{r\theta}} \tau_{r\theta}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{\gamma_{\theta z}}{\gamma_{r\theta}} \tau_{r\theta}. \quad (15)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (1) и принимая, что $\tau_{r\theta}$ не зависит от θ и r , получим

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.$$

Из первого уравнения (16) находим

$$\sigma_r(r, \theta, z) = Q(\theta, z) + \int_{r_1}^r \frac{2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z}{\gamma_{r\theta}} \tau_{r\theta} dr, \quad (17)$$

где Q произвольная функция θ и z .

Подставляя σ_r из (17) во второе и третье уравнения (16), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 2 \frac{a_1}{r}, & \frac{\partial Q}{\partial \theta} + 2a_1 &= 0, \\ \frac{d\tau_{rz}}{dr} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 2b_1, & \frac{\partial Q}{\partial z} + 2b_1 &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда имеем

$$\tau_{r\theta} = a_1 + \frac{a_0}{r^2}, \quad \tau_{rz} = b_1 r + \frac{b_0}{r}, \quad (19)$$

$$Q = -2a_1\theta - 2b_1z - 2c_1. \quad (20)$$

Здесь a_1, a_0, b_1, b_0, c_1 — произвольные постоянные.

Из условия текучести (2) и соотношений (15) определяя $\gamma_{r\theta}$, далее используя выражения (11) — (13), для компонентов напряжений (15), (17) и скоростей перемещений (5) — (7) получим

$$\sigma_r = -2a_1\theta - 2b_1z - 2c_1 + \int_{r_1}^r \sqrt{\frac{k^2 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \gamma_{\theta z}^2}} (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) dr, \quad (21)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r + (2\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \sqrt{\frac{k^2 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \gamma_{\theta z}^2}}, \quad (22)$$

$$\sigma_z = \sigma_r + (\varepsilon_\theta + 2\varepsilon_z) \sqrt{\frac{k^2 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \gamma_{\theta z}^2}}, \quad (23)$$

$$\tau_{\theta z} = \gamma_{\theta z} \sqrt{\frac{k^2 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \gamma_{\theta z}^2}}; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} u = & -\left(\frac{A_1}{2} + B_0\right)r + \left(A_0 + \frac{A_1}{2}r_1\right)\frac{r_1}{r} + G_1\cos\theta + G_2\sin\theta + \\ & + (E_1\cos\theta + E_2\sin\theta)z, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} v = & 2r \int_{r_1}^r \sqrt{\frac{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \gamma_{\theta z}^2}{k^2 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{rz}^2}} \tau_{r\theta} \frac{dr}{r} + D_1r + 2C_1rz + (A_1 + B_0)r\theta - \\ & - G_1\sin\theta + G_2\cos\theta - (E_1\sin\theta - E_2\cos\theta)z, \end{aligned} \quad (26)$$

$$w = 2 \int_{r_1}^r \sqrt{\frac{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta \varepsilon_z + \varepsilon_z^2 + \gamma_{\theta z}^2}{k^2 - \tau_{r\theta}^2 - \tau_{\theta z}^2}} \tau_{rz} dr + D_2 + 2C_0\theta + B_0z - (E_1 \cos\theta + E_2 \sin\theta) r. \quad (27)$$

Не рассматривая в настоящей статье конкретных задач, заметим, что полученное решение, содержащее 16 произвольных постоянных, может являться решением некоторых новых трехмерных задач теории идеальной пластичности. В частности, некоторые задачи о совместном кручении, изгибе и растяжении цилиндрической трубы, цилиндрического сектора и др.

Отметим, что из приведенного здесь решения, когда $a_1 = C_0 = C_1 = E_1 = E_2 = G_1 = G_2 = A_1 + B_0 = 0$, получим решение, данное Д. Д. Ивлевым (¹), если в его работе полагать отсутствующими массовые силы и температурное воздействие.

Другие решения пространственных задач теории идеальной пластичности даются в работах (²⁻⁶).

Аналогично примененным здесь полуобратным способом другое решение уравнений теории идеальной пластичности в декартовых координатах получено в работе (⁷).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

Պլանային կոորդինատներով իդեալական պլաստիկականության հետևության հավասարումների մի մասնավոր լուծման մասին

Ստացված է ղլանային կոորդինատներով պլաստիկականության տեսության հավասարումների մասնավոր լուծումը, որը հնարավորություն է տալիս լուծելու մի քանի նոր տարածական խնդիրներ: Հավասարակշռության հավասարումները ղլանային կոորդինատներով ընդհանուր դեպքում ունի (1) տեսքը: (2)-ը Հուրբեր-Միգեսի պլաստիկականության պայմանն է: Դեֆորմացիաների արագությունների և լարումների բաղադրիչների միջև գոյություն ունեն (3) — (4) առնչությունները: Վերջին կապակցություններից արագության բաղադրիչները կարելի է որոշել (5) — (7) տեսքով, որտեղ u_0 , v_0 , w_0 կամայական ֆունկցիաներ են θ -ից և z -ից: Ընդունելով, որ դեֆորմացիաների արագությունների տենզորը կախված չէ θ և z կոորդինատներից ε_θ -ի, ε_z -ի և $\gamma_{\theta z}$ -ի համար ստանում ենք (8) — (10) առնչությունները, որտեղ A_0 , A_1 , B_0 , B_1 , C_0 , C_1 -ը կամայական հաստատուններ են: (8) — (10) կապակցություններից ստանում ենք $B_1 = 0$ իսկ u_0 , v_0 և w_0 կամայական ֆունկցիաները որոշվում են (11) — (13) բանաձևերով: Այստեղ D_0 , D_1 , E_1 , E_2 , G_1 , G_2 -ը նույնպես կամայական հաստատուններ են: (3) — (4) առնչություններից σ_θ , σ_z , $\tau_{\theta z}$ բաղադրիչները կարելի է ներկայացնել (15) տեսքով:

Տեղադրելով այդ արահայտությունները (1) հավասարակշռության հավասարումների մեջ և ընդունելով, որ $\tau_{r\theta}$ -ը կախում չունի θ -ից և z -ից, ստանում ենք (16) դիֆերենցիալ հավասարումների սխեման: (16)-ի առաջին հավասարումից σ_r -ի համար ստանում ենք (17) արտահայտությունը, որտեղ Q -ն կամայական ֆունկցիա է θ -ից և z -ից: Այնուհետև ստանում ենք դիֆերենցիալ հավասարումների (18) սխեման, որից ստանում ենք (19)-ը և (20)-ը: Պլաստիկականության (2) պայմանից և (15) առնչություններից որոշելով $\gamma_{r\theta}$ -ը լարումների և արագությունների համար վերջնականապես ստանում ենք (21) — (27) բանաձևերը:

Ստացված լուծումը պարունակում է 16 կամայական հաստատումներ և պարունակում է մի քանի նոր տարածական խնդիրների լուծումներ: Այսպես օրինակ, $\theta = \pm \theta_0$, $z = z_0$ հարթություններով և $r = r_1$, $r = r_2$ շրջանային մակերևույթների արանքով մտրման, ծռման և ձգման վերաբերյալ մի քանի մասնավոր խնդիրներ և այլն:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. Д. Ивлев, ДАН СССР, т. 123, № 6 (1958). ² А. Ю. Ишлинский, ПММ, т. 8, в. 3, 1944. ³ В. В. Соколовский, Теория пластичности, М., 1950. ⁴ R. Hill, The mathematical mtheory of placticity, Oxford, 1950. ⁵ К. Т. Шилд, Proc. of. Royal Soc; 1955. ⁶ Д. Д. Ивлев, Докторская диссертация, МГУ, 1959. ⁷ М. А. Задоян, ДАН СССР, т. 136, № 1 (1964).