

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

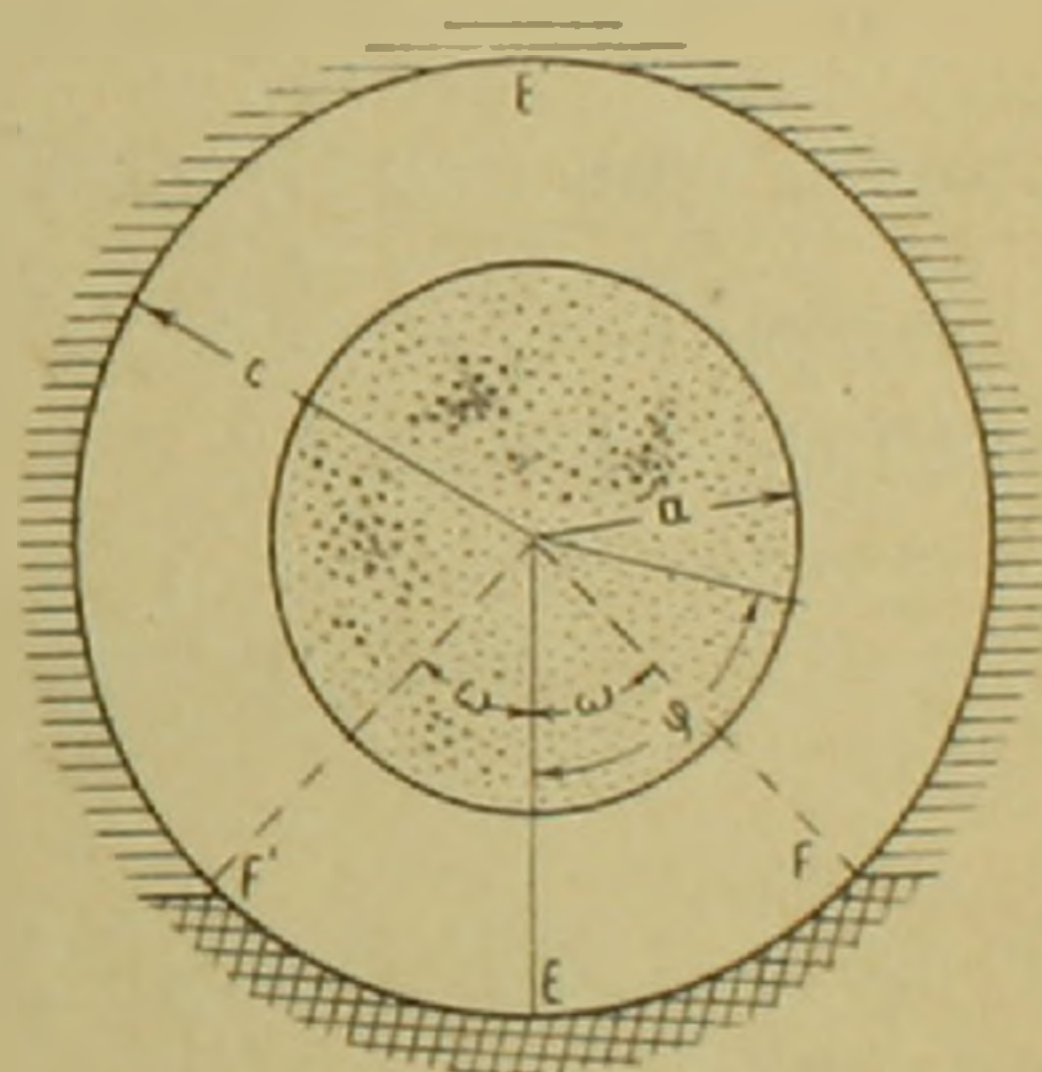
Р. С. Минасян

О плоском установившемся течении тепла в составном цилиндре
при наличии теплообмена с двумя различными
окружающими средами

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 14/VII 1964)

В настоящей работе дается эффективное решение задачи плоского установившегося течения тепла в круглом неоднородном бесконечном цилиндре, составленном из сплошного цилиндра, находящегося внутри полого концентрического цилиндра, с различными теплофизическими характеристиками (фиг. 1), когда на внешней поверхности рассматриваемого тела происходит теплообмен с двумя различными средами. Предполагается, что внутри тела происходит тепловыделение.

Поместим центр поперечного сечения тела в начало координат, причем так, чтобы угол $F'EF$ был симметрично расположен относительно оси $\varphi = 0$ (фиг. 1), и если обозначим через $U_1(r, \varphi)$ температуру внутри цилиндра $0 \leq r \leq a$, а через $U_2(r, \varphi)$ — температуру в цилиндре $a \leq r \leq c$, то U_1 и U_2 будут



Фиг. 1.

удовлетворять (в соответствующих областях) следующему уравнению [1]

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2} = - \frac{1}{\lambda_i} Q_i(r, \varphi) \quad (i = 1; 2), \quad (1)$$

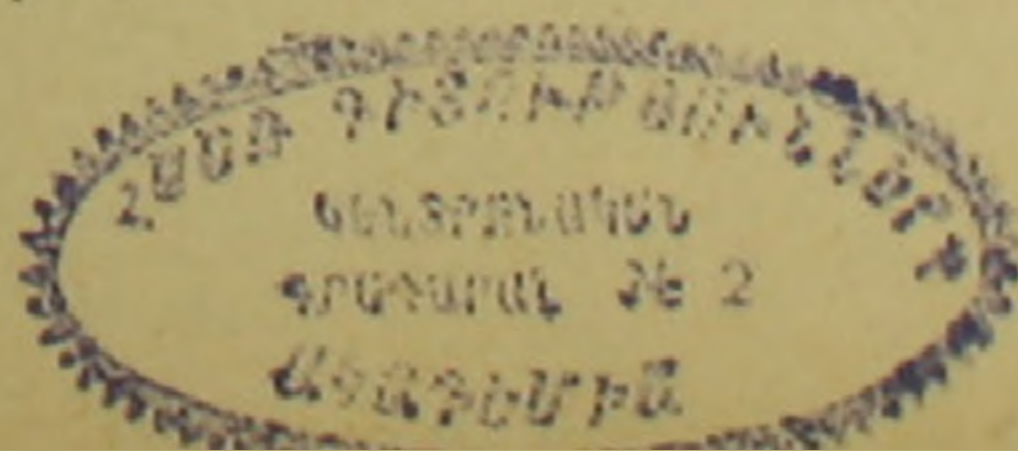
условиям сопряжения на поверхности раздела $r = a$

$$U_1(a, \varphi) = U_2(a, \varphi); \quad \lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial r} \Big|_{r=a} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial r} \Big|_{r=a}, \quad (2)$$

а также условиям на границе тела $r = c$

$$\frac{\partial U_2(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=c} = h_1 [S_1(\varphi) - U_2(c, \varphi)] \quad (3)$$

при $\omega < \varphi < 2\pi - \omega$;



$$\left. \frac{\partial U_2(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=c} = h_2 [S_2(\varphi) - U_2(c, \varphi)] \quad (4)$$

при $0 < \varphi < \omega$ и $2\pi - \omega < \varphi < 2\pi$.

Здесь λ_i — коэффициент теплопроводности i -й среды; $Q_i(r, \varphi)$ — интенсивность тепловыделения; $h_1, S_1(\varphi)$ — соответственно коэффициент теплообмена и температура окружающей среды на участке поверхности $FE'F'$, а $h_2, S_2(\varphi)$ — на участке $F'EF$.

Относительно $Q_1(r, \varphi)$ и $Q_2(r, \varphi)$ предполагаем, что они суммируемы; что касается функций $S_1(\varphi)$ и $S_2(\varphi)$, то предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию.

Для нахождения решения задачи предварительно разложим функции $U_1(r, \varphi)$ и $U_2(r, \varphi)$ в ряд Фурье

$$U_i(r, \varphi) = \frac{g_0^{(i)}(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [f_k^{(i)}(r) \sin k\varphi + g_k^{(i)}(r) \cos k\varphi] \quad (5)$$

$(i = 1; 2),$

где

$$f_k^{(i)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_i(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi; \quad g_k^{(i)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_i(r, \varphi) \cos k\varphi d\varphi.$$

Умножая уравнение (1) последовательно на $\frac{1}{\pi} \sin k\varphi d\varphi$ и $\frac{1}{\pi} \cos k\varphi d\varphi$ и интегрируя от 0 до 2π , для определения $f_k^{(i)}(r)$ и $g_k^{(i)}(r)$ получим следующие уравнения

$$f_k^{(i)'}(r) + \frac{1}{r} f_k^{(i)'}(r) - \frac{k^2}{r^2} f_k^{(i)}(r) = q_k^{(i)}(r);$$

$$g_k^{(i)'}(r) + \frac{1}{r} g_k^{(i)'}(r) - \frac{k^2}{r^2} g_k^{(i)}(r) = p_k^{(i)}(r), \quad (6)$$

где

$$q_k^{(i)}(r) = -\frac{1}{\lambda_i \pi} \int_0^{2\pi} Q_i(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi;$$

$$p_k^{(i)}(r) = -\frac{1}{\lambda_i \pi} \int_0^{2\pi} Q_i(r, \varphi) \cos k\varphi d\varphi. \quad (7)$$

Решая уравнения (6) и удовлетворяя условиям сопряжения (2), будем иметь

$$f_k^{(i)}(r) = A_k a^{-k} r^k - \frac{1}{2k} \left[r^{-k} \int_0^r q_k^{(i)}(t) t^{k+1} dt + r^k \int_r^a q_k^{(i)}(t) t^{-k+1} dt \right];$$

$$g_k^{(1)}(r) = C_k a^{-k} r^k - \frac{1}{2k} \left[r^{-k} \int_0^r p_k^{(1)}(t) t^{k+1} dt + r^k \int_r^a p_k^{(1)}(t) t^{-k+1} dt \right];$$

$$g_0^{(1)}(r) = C_0 + \ln r \int_0^r p_0^{(1)}(t) t dt + \int_r^a p_0^{(1)}(t) t \ln t dt;$$

$$f_k^{(2)}(r) = \frac{1}{2\lambda_2} \left[A_k M_k(r, a) - \frac{a^{-k}}{2k} M_k(a, r) \int_0^a q_k^{(1)}(t) t^{k+1} dt \right] + \\ + \frac{1}{2k} \int_a^r q_k^{(2)}(t) L_k(r, t) t dt; \quad (8)$$

$$g_k^{(2)}(r) = \frac{1}{2\lambda_2} \left[C_k M_k(r, a) - \frac{a^{-k}}{2k} M_k(a, r) \int_0^a p_k^{(1)}(t) t^{k+1} dt \right] + \\ + \frac{1}{2k} \int_a^r p_k^{(2)}(t) L_k(r, t) t dt;$$

$$g_0^{(2)}(r) = C_0 + \left(\ln a + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{r}{a} \right) \int_0^a p_0^{(1)}(t) t dt + \int_a^r p_0^{(2)}(t) t \ln \frac{r}{t} dt.$$

Здесь для краткости обозначено

$$M_k(r, x) = (\lambda_1 + \lambda_2) r^k x^{-k} - (\lambda_1 - \lambda_2) x^k r^{-k}; \\ L_k(r, x) = r^2 x^{-k} - x^k r^{-k}. \quad (9)$$

Прежде чем перейти к определению неизвестных A_k и C_k , входящих в выражения (8) для функций $f_k^{(1)}(r)$ и $g_k^{(1)}(r)$, представим граничные условия (3) и (4) в следующем виде

$$\frac{\partial U_2(r, \varphi)}{\partial r} \Big|_{r=c} + \left[\frac{h_1 + h_2}{2} + \psi(\varphi) \right] U_2(c, \varphi) = S(\varphi), \quad (10)$$

где функция $\psi(\varphi) = (h_1 - h_2) \left[\frac{1}{2} - \frac{\omega}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\omega \cos k\varphi}{k} \right]$ равна $\frac{h_1 - h_2}{2}$ при $\omega > \varphi > 2\pi - \omega$ и $-\frac{h_1 - h_2}{2}$ в интервалах $(0, \omega)$ и $(2\pi - \omega, 2\pi)$, а $S(\varphi)$ равняется $h_1 S_1(\varphi)$ в $(\omega, 2\pi - \omega)$ и $h_2 S_2(\varphi)$ в $(0, \omega)$ и $(2\pi - \omega, 2\pi)$.

Умножая правую и левую части условия (10) последовательно на $\frac{1}{\pi} \sin k\varphi d\varphi$ и $\frac{1}{\pi} \cos k\varphi d\varphi$ и интегрируя от 0 до 2π , будем иметь

$$\begin{aligned}
f_k^{(2)'}(c) + \left[\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) h_1 + \frac{\omega}{\pi} h_2 + \frac{(h_1 - h_2) \sin 2k\omega}{2k\pi} \right] f_k^{(2)}(c) = \\
= \frac{2(h_1 - h_2)}{\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{k \cos k\omega \sin j\omega - j \cos j\omega \sin k\omega}{j^2 - k^2} f_j^{(2)}(c) + \xi_k \\
g_k^{(2)'}(c) + \left[\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) h_1 + \frac{\omega}{\pi} h_2 - \frac{(h_1 - h_2) \sin 2k\omega}{2k\pi} \right] g_k^{(2)}(c) = \\
= \frac{2(h_1 - h_2)}{\pi} \left[\frac{\sin k\omega}{2k} g_0^{(2)}(c) + \right. \\
\left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{j \sin j\omega \cos k\omega - k \sin k\omega \cos j\omega}{j^2 - k^2} g_j^{(2)}(c) \right] + \zeta_k; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0^{(2)'}(c) + \left[\left(1 - \frac{\omega}{\pi}\right) h_1 + \frac{\omega}{\pi} h_2 \right] g_0^{(2)}(c) = \\
= \frac{2(h_1 - h_2)}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\omega}{j} g_j^{(2)}(c) + \zeta_0.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\xi_k = \frac{1}{\pi} \left[h_2 \int_0^{\omega} S_2(\varphi) \sin k\varphi d\varphi + h_1 \int_{\omega}^{2\pi-\omega} S_1(\varphi) \sin k\varphi d\varphi + \right. \\
\left. + h_2 \int_{2\pi-\omega}^{2\pi} S_2(\varphi) \sin k\varphi d\varphi \right]; \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_k = \frac{1}{\pi} \left[h_2 \int_0^{\omega} S_2(\varphi) \cos k\varphi d\varphi + h_1 \int_{\omega}^{2\pi-\omega} S_1(\varphi) \cos k\varphi d\varphi + \right. \\
\left. + h_2 \int_{2\pi-\omega}^{2\pi} S_2(\varphi) \cos k\varphi d\varphi \right].
\end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned}
A_k = \frac{1}{M_k(c, a)} \left[\frac{2\lambda_2 m_k}{k\sqrt{k}} + \frac{a^{-k}}{2k} M_k(a, c) \int_0^a q_k^{(1)}(t) t^{k+1} dt - \right. \\
\left. - \frac{\lambda_2}{k} \int_a^c q_k^{(2)}(t) L_k(c, t) t dt \right]; \quad (13)
\end{aligned}$$

$$C_k = \frac{1}{M_k(c, a)} \left[\frac{2\lambda_2 n_k}{k\sqrt{k}} + \frac{a^{-k}}{2k} M_k(a, c) \int_0^a p_k^{(1)}(t) t^{k+1} dt - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_2}{k} \int_a^c p_k^{(2)}(t) L_k(c, t) t dt \right],$$

из (11), (8) и (13), после некоторых преобразований, для определения новых постоянных m_k и n_k получим две не зависящие друг от друга бесконечные системы линейных алгебраических уравнений

$$m_k = \frac{2(h_1 - h_2)c\sqrt{k}}{\pi\mu_k} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{k \cos k\omega \sin j\omega - j \sin k\omega \cos j\omega}{jVj(j^2 - k^2)} m_j + \xi_k' \quad (14)$$

$$n_k = \frac{2(h_1 - h_2)c\sqrt{k}}{\pi\nu_k} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \frac{j \cos k\omega \sin j\omega - k \cos j\omega \sin k\omega}{jVj(j^2 - k^2)} n_j + \frac{\sin k\omega}{2k} n_0 \right] + \xi_k,$$

где

$$\mu_k = 1 + c \frac{(\pi - \omega)h_1 + \omega h_2}{k\pi} - \frac{c(h_1 - h_2) \sin 2k\omega}{2k^2\pi} + \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2)}{M_k(c, a)} a^k c^{-k};$$

$$\nu_k = \mu_k + \frac{c(h_1 - h_2) \sin 2k\omega}{k^2\pi}; \quad n_0 = g_0^{(2)}(c)$$

$$\xi_k' = \frac{\sqrt{k}}{\mu_k} \left\{ c\xi_k - \frac{1}{M_k(c, a)} \left[2\lambda_1 a^{-k} \int_0^a q_k^{(1)}(t) t^{k+1} dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_a^c q_k^{(2)}(t) M_k(t, a) t dt \right] \right\}; \quad (15)$$

$$\xi_k = \frac{\sqrt{k}}{\nu_k} \left\{ c\xi_k - \frac{1}{M_k(c, a)} \left[2\lambda_1 a^{-k} \int_0^a p_k^{(1)}(t) t^{k+1} dt + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_a^c p_k^{(2)}(t) M_k(t, a) t dt \right] \right\}.$$

Что касается n_0 , то она определяется посредством n_j из следующей зависимости

$$n_0 = \frac{\pi}{(\pi - \omega)h_1 + \omega h_2} \left[\frac{2(h_1 - h_2)}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin j\omega}{jVj} n_j + \xi_0 - \right. \\ \left. - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 c} \int_0^a p_0^{(1)}(t) t dt - \frac{1}{c} \int_a^c p_0^{(2)}(t) t dt \right]. \quad (16)$$

Для исследования разрешимости систем (14) оценим предварительно суммы модулей коэффициентов в каждом из уравнений этих систем. Обозначив через σ_k сумму модулей коэффициентов k -го уравнения первой из систем (14), будем иметь

$$\sigma_k < \frac{4|h_1 - h_2|c}{\sqrt{k}\pi\mu_k} \left(1 + \frac{\ln k + 6}{2k}\right). \quad (17)$$

Выражение в правой части неравенства (17), начиная со значения $k \geq \frac{G^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{6}{G}}\right)^2$, где $G = \frac{4(h_1 - h_2)c}{\pi}$, становится меньше 1, причем с возрастанием k оно стремится к нулю с быстротой $\frac{G}{\sqrt{k}}$.

Аналогичные оценки получаем для второй из систем (14).

Таким образом, системы (14) квазирегулярны, причем сумма модулей коэффициентов k -го уравнения систем стремится к нулю с быстротой $\frac{G}{\sqrt{k}}$. С другой стороны, принимая во внимание условия относительно заданных функций $S_1(\varphi)$, $S_2(\varphi)$ и $Q_i(r, \varphi)$, из (15) и (12) получаем, что свободные члены систем (14) остаются ограниченными в своей совокупности. Согласно общей теории бесконечных систем линейных алгебраических уравнений [2], системы (14) имеют единственное ограниченное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Подставляя значение $f_k^{(1)}(r)$ из (8) в (5), а также принимая во внимание (13) и (7), для функции $U_1(r, \varphi)$ окончательно получим

$$\begin{aligned} U_1(r, \varphi) = & \frac{n_0}{2} - \frac{1}{2\lambda_1\lambda_2\pi} \left[N_0(r) \int_0^r \int_0^{2\pi} Q_1(t, \theta) t d\theta dt + \right. \\ & + \int_r^a \int_0^{2\pi} Q_1(t, \theta) N_0(t) t d\theta dt \left. \right] - \frac{1}{2\lambda_2\pi} \int_a^c \int_0^{2\pi} Q_2(t, \theta) t \ln \frac{t}{c} d\theta dt + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k(c, a)} \left\{ a^{-k} r^k \left[\frac{2\lambda_2}{k\sqrt{k}} (m_k \sin k\varphi + n_k \cos k\varphi) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{k\pi} \int_a^c \int_0^{2\pi} Q_2(t, \theta) L_k(c, t) t \cos k(\varphi - \theta) d\theta dt \left. \right] + \\ & + \frac{1}{2\lambda_1 k\pi} \left[N_k(r) \int_0^r \int_0^{2\pi} Q_1(t, \theta) t^{k+1} \cos k(\varphi - \theta) d\theta dt + \right. \\ & \left. \left. + r^k \int_r^a \int_0^{2\pi} Q_1(t, \theta) N_k(t) t \cos k(\varphi - \theta) d\theta dt \right] \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

$$(0 \leq r \leq a),$$

где обозначено

$$N_k(r) = [M_k(c, a) r^{-k} - M_k(a, c) a^{-2k} r^k];$$

$$N_0(r) = \lambda_2 \ln r - \lambda_1 \ln c + (\lambda_1 - \lambda_2) \ln a. \quad (19)$$

Аналогично получаем для $U_2(r, \varphi)$

$$\begin{aligned} U_2(r, \varphi) = & \frac{n_0}{2} - \frac{1}{2\lambda_2\pi} \left[\ln \frac{r}{c} \int_0^a \int_0^{2\pi} Q_1(t, \theta) t d\theta dt + \right. \\ & + \ln \frac{r}{c} \int_a^r \int_0^{2\pi} Q_2(t, \theta) t d\theta dt + \int_r^c \int_0^{2\pi} Q_2(t, \theta) t \ln \frac{t}{c} d\theta dt \Big] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{M_k(c, a)} \left\{ \frac{M_k(r, a)}{k\sqrt{k}} (m_k \sin k\varphi + n_k \cos k\varphi) + \right. \\ & + \frac{1}{k\pi} \left[L_k(c, r) \int_0^a \int_0^{2\pi} Q_1(t, \theta) t^{k+1} \cos k(\varphi - \theta) d\theta dt + \right. \\ & + \frac{1}{2\lambda_2} L_k(c, r) \int_a^r \int_0^{2\pi} Q_2(t, \theta) M_k(t, a) t \cos k(\varphi - \theta) d\theta dt + \\ & \left. \left. + \frac{1}{2\lambda_2} M_k(r, a) \int_r^c \int_0^{2\pi} Q_2(t, \theta) L_k(c, t) t \cos k(\varphi - \theta) d\theta dt \right] \right\} \quad (20) \\ & (a \leq r \leq c). \end{aligned}$$

Ряды, входящие в выражения (18) и (20) для $U_1(r, \varphi)$ и $U_2(r, \varphi)$, весьма быстро сходятся в соответствующих областях, включая границы. Задаваясь значениями величин λ_i , h_i и функций Q_i , S_i , а также геометрическими размерами области и величиной угла ω , из (14) получим оценки для m_k и n_k сверху и снизу, после чего способом, изложенным в (3), найдем из (18) и (20) значения $U_1(r, \varphi)$ и $U_2(r, \varphi)$ с избытком и недостатком.

В заключение рассмотрим некоторые из частных случаев. а) Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то получим однородный цилиндр, и выражения (18) и (20) значительно упростятся. б) При $\lambda_1 = 0$ имеем полый цилиндр с теплоизолированной внутренней поверхностью. в) Если $h_1 = h_2$, т. е. окружающая среда однородна, то ряды, входящие в (14), исчезают, системы бесконечных алгебраических уравнений (14) вырождаются в равенства и решение совпадает с решением, получаемым обычным способом.

**Քաղաքում գլանում ջերմության հարթ կայունացած հոսքի մասին՝
երկու հարբեր շրջապատող միջավայրերի հետ ջերմափոխանակման
առկայության դեպքում**

Հոդվածում դիտարկվում է ջերմության հարթ կայունացած հոսքը անհամասեռ կլոր անվերջ գլանում, երբ այն կազմված է տարբեր նյութերից բաղկացած սնամեջ գլանից և նրա ներսը գտնվող հոծ գլանից:

Ենթադրվում է, որ մարմնի արտաքին մակերևույթի վրա տեղի ունի ջերմափոխանակություն երկու տարրեր շրջապատող միջավայրերի հետ, իսկ մարմնի ներսը գոյություն ունի ջերմարտադրություն:

Խնդրի լուծումը տրվում է եռանկյունաչափական և աստիճանային ֆունկցիաներից կազմված արագ գույամիտող շարքերով, որոնց դորժակիցները որոշվում են գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխտեմից, որի k -երրորդ հավասարման դորժակիցների մոդուլների գումարը k -ի ածական հետ միասին ձգտում է գրոյի $\frac{G}{\sqrt{k}}$ -ի արագության:

ЛИТЕРАТУРА — Г. Р. М. Ч. Ա. Ն. Ս. Մ. Յ. Ն.

- ¹ H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, Conduction of heat in solids, Oxford, 1948.
² Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962. ³ Р. С. Минасян, „Известия АН АрмССР“, серия физ.-мат. наук, XI, 3 (1958).