ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIX 1964 4

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. С. Саркисян

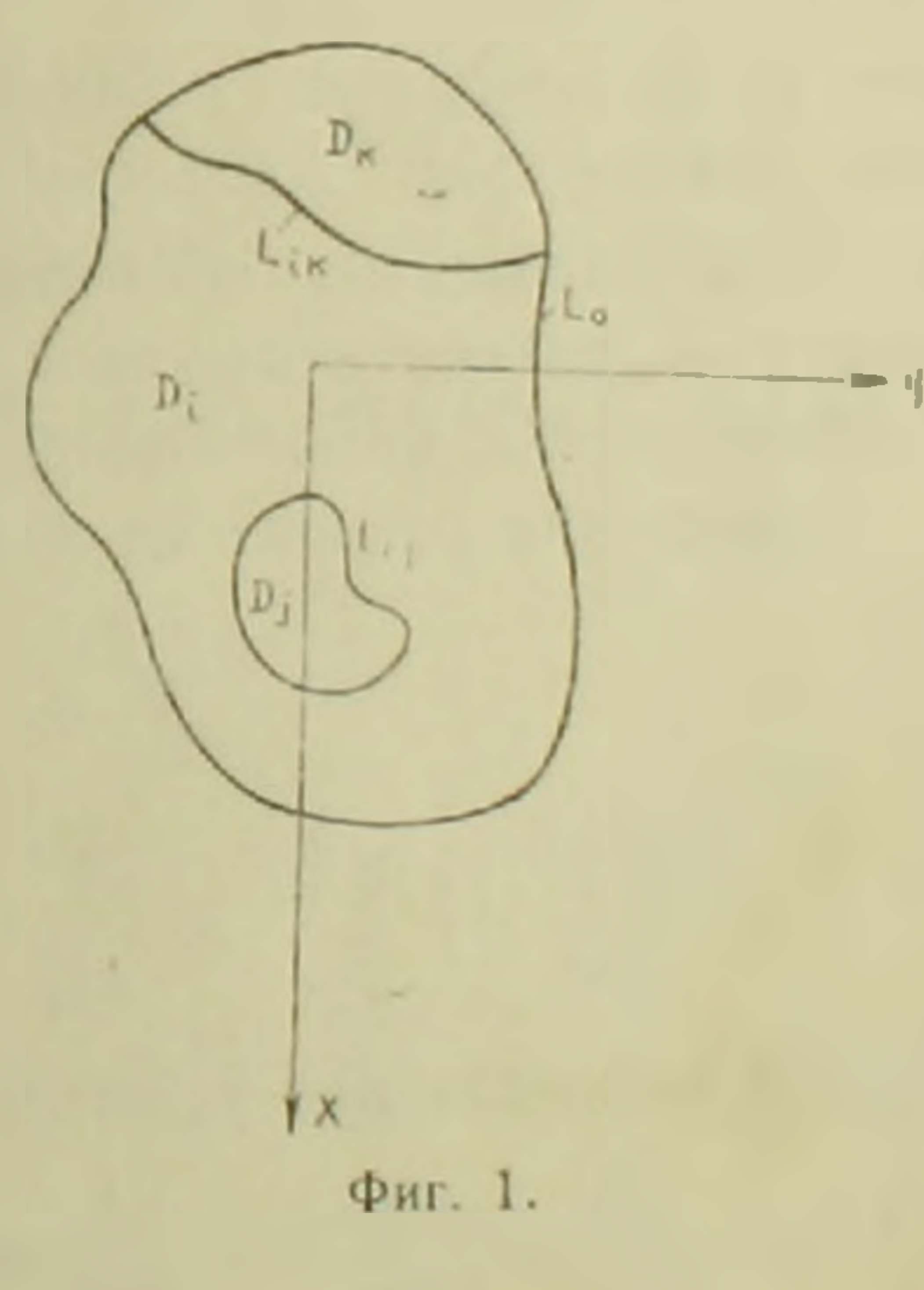
Изгиб неортотропных составных призматических стержней

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 13 IV 1964)

Изгиб составных стержней через функцию кручения и изгиба исследован Н. И. Мусхелишвили (1). Эта же задача для анизотропных стержней рассмотрена К. И. Боршем (2). Задача об изгибе изотропных составных стержней через функцию напряжения исследована в работах (3–4), а с учетом линейной ползучести рассмотрена Н. Х. Арутюняном и К. С. Чобаняном (5).

В настоящей работе рассматривается задача изгиба стержня, составленного из различных анизотропных (неортотропных) материалов, через функцию напряжений при произвольном расположении поперечной изгибающей силы.

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Рассмотрим анизотропный стержень, составленный из различных анизотропных призматических тел, спаянных или склеенных по боковым поверхностям когда упругие постоянные этих тел различны. Предположим, что в каждой точке каждого тела имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, нормальная к оси стержня (т. е. каждое тело—неортотропное).



Фиг. 1.

Область поперечного сечения, соответствующую различным материалам стержня, обозначим через $D_1, \cdots, D_n$, линию раздела смежных областей D_k и D_l — через L_{kl}, а контур всей области—через L_0 (фиг. 1).

Пусть один конец стержня заделан, а к другому концу приложена поперечная изгибающая сила $\vec{P}(P_x, P_y)$ произвольного направления. Поместим начало координат x, y, z в некоторой точке сечения заделанного конца изгибаемого стержня. Ось z направим параллельно образующим поверхности призматического составного анизотропного стержня, а оси x и y в плоскости поперечного сечения. Для ... принимаем следующее выражение

$$\sigma_z = (A_0x + B_0y + K_0)(l - z), \tag{1.1}$$

где l — длина стержня, а A_0, B_0 и K_0 — пока неизвестные постоянные.

Предположим, что коэффициенты Пуассона ν_{xz}, ν_{yz} и коэффициенты взаимного влияния первого рода $\eta_{l\,xy,\,z}$ материалов составляющих тел одинаковы.

Имеем

$$\sigma_x^{(i)} = \sigma_y^{(i)} = \tau_{xy}^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2}$$

Уравнения обобщенного закона Гука, отнесенные к указанной системе координат, примут вид [6],

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\nu_{xz}\cdot(A_0x + B_0y + K_0)(l - z),\\ \varepsilon_y &= -\nu_{yz}\cdot(A_0x + B_0y + K_0)(l - z),\\ \varepsilon_z &= (A_0x + B_0y + K_0)(l - z), \end{aligned}\right| \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{yz}^{(i)} &= a_{44}^{(i)}\tau_{yz}^{(i)} + a_{45}^{(i)}\tau_{xz}^{(i)}\\ \gamma_{xz}^{(i)} &= a_{45}^{(i)}\tau_{yz}^{(i)} + a_{55}^{(i)}\tau_{xz}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)\\ \gamma_{xy} &= \eta_{l\,xy,\,z}\cdot(A_0x + B_0y + K_0)(l - z). \end{aligned}\right| \tag{1.4}$$

Из условий равновесия части стержня, расположенной между свободным концом $z = l$ и произвольным сечением $z = \mathrm{const}$, для определения A_0, B_0 и K_0 получаются уравнения

$$\left.\begin{aligned} A_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{iy}}{a_{33}^{(i)}} + B_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ix}}{a_{33}^{(i)}} + K_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_i}{a_{33}^{(i)}} &= 0,\\ A_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{J_{ixy}}{a_{33}^{(i)}} + B_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{J_{ix}}{a_{33}^{(i)}} + K_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{ix}}{a_{33}^{(i)}} &= -P_y,\\ A_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{J_{iy}}{a_{33}^{(i)}} + B_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{J_{ixy}}{a_{33}^{(i)}} + K_0\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{s_{iy}}{a_{33}^{(i)}} &= -P_x. \end{aligned}\right| \tag{1.5}$$

Здесь s_i — площадь области D_i, s_{ix} и s_{iy} — статические моменты площади s_i относительно осей x и y, а J_{iy} и J_{ixy} — моменты инерции и центробежный момент инерции площади s_i относительно осей x и y.

Уравнения равновесия для элемента стержня имеют вид,

$$\frac{\partial\tau_{xz}^{(i)}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{yz}^{(i)}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}^{(i)}}{\partial y} - \frac{1}{a_{33}^{(i)}}(A_0x + B_0y + K_0) = 0, \tag{1.6}$$

и будут тождественно удовлетворены, если положить

$$\tau_{xz}^{(i)} = \frac{\partial\Psi_i}{\partial y} + \frac{1}{2a_{33}^{(i)}}(A_0x^2 + K_0x) + \varphi_i(y), \tag{1.7}$$

$$\tau_{yz}^{(i)} = -\frac{\partial\Psi_i}{\partial x} + \frac{1}{2a_{33}^{(i)}}(B_0y^2 + K_0y) + \psi_i(x). \tag{1.8}$$

где через $\Psi_i(x, y)$ обозначена функция напряжений в области D_i, а $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ — произвольные функции.

Из условия совместности деформаций, учитывая (1.3), получим

$$\frac{\partial \gamma_{zx}^{(i)}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}^{(i)}}{\partial x} = (2\nu_{xz} B_0 + \eta_{xy,z} A_0)\, x - (2\nu_{yz} A_0 + \eta_{xy,z} \cdot B_0)\, y + C_0, \qquad (1.9)$$

здесь C_0 — произвольная постоянная интегрирования.

Далее при помощи (1.4) и (1.7) из (1.9) находим, что

$$a_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(i)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(i)} \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = (2\nu_{xz} \cdot B_0 + \eta_{xy,z} \cdot A_0) x - (2\nu_{yz} \cdot A_0 +$$

$$+ \eta_{xy,z} \cdot B_0)\, y + \frac{a_{45}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}} (A_0 x - B_0 y) + a_{44}^{(i)} \psi_i'(x) - a_{45}^{(i)} \varphi_i'(y) + C_0. \qquad (2.10)$$

Так как боковая поверхность стержня свободна от внешних воздействий, то получим

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial s} = \left[\frac{1}{2a_{33}^{(i)}} (B_0 y^2 + K_0 y) + \psi_i(x) \right] \frac{dx}{ds} - \left[\frac{1}{2a_{33}^{(i)}} (A_0 x^2 + K_0 x) + \varphi_i(y) \right] \frac{dy}{ds}$$

$$\text{на } L_0. \qquad (1.11)$$

Из условия равновесия бесконечно малого элемента, находящегося в окрестности линии раздела L_{ij} областей D_i и D_j, находим

$$\frac{\partial \Psi_i}{ds} - \frac{\partial \Psi_j}{\partial s} = f_{ij} \quad \text{на } L_{ij}, \qquad (1.12)$$

где

$$f_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{33}^{(i)}} - \frac{1}{a_{33}^{(j)}} \right) \left[(B_0 y^2 + K_0 y) \frac{dx}{ds} - (A_0 x^2 + K_0 x) \frac{dy}{ds} \right] +$$

$$+ (\psi_i - \psi_j) \frac{dx}{ds} - (\varphi_i - \varphi_j) \frac{dy}{ds}.$$

Воспользуемся условием непрерывности перемещений на линиях раздела L_{ij}. Напишем выражения составляющих деформации сдвига для области D_i, затем учитывая (1.4), (1.7) и (1.8), получим

$$\frac{\partial w_i}{\partial x} = a_{45}^{(i)} \left[-\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{1}{2a_{33}^{(i)}} (B_0 y^2 + K_0 y) + \psi_i(x) \right] + a_{55}^{(i)} \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a_{33}^{(i)}} (A_0 x^2 + K_0 x) + \varphi_i(y) \right] - \frac{\partial u_i}{\partial z}, \qquad (1.13)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial y} = a_{44}^{(i)} \left[-\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \frac{1}{2a_{33}^{(i)}} (B_0 y^2 + K_0 y) + \psi_i(x) \right] + a_{45}^{(i)} \left[\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a_{33}^{(i)}} (A_0 x^2 + K_0 x) + \varphi_i(y) \right] - \frac{\partial v_i}{\partial z}. \qquad (1.14)$$

Умножая соотношение (1.13) на $\frac{dx}{ds}$, а 1.14 — на $\frac{dy}{ds}$, складывая результаты, устанавливаем

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)_i - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n} \right)_j = g_{ij}, \qquad (1.15)$$

где

$$g_{ij}=\frac{1}{2}\,(B_0y^2+K_0y)\cdot\left|\left(\frac{a_{44}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}}-\frac{a_{44}^{(j)}}{a_{33}^{(j)}}\right)\cdot\frac{dx}{dn}-\left(\frac{a_{45}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}}-\frac{a_{45}^{(j)}}{a_{33}^{(j)}}\right)\frac{dy}{dn}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\,(A_0x^2+K_0x)\left[\left(\frac{a_{45}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}}-\frac{a_{45}^{(j)}}{a_{33}^{(j)}}\right)\frac{dx}{dn}-\left(\frac{a_{55}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}}-\frac{a_{55}^{(j)}}{a_{33}^{(j)}}\right)\frac{dy}{dn}\right]+[\psi_i(x)\,a_{45}^{(i)}-$$

$$-\psi_j(x)\,a_{45}^{(j)}]\,\frac{dx}{ds}+[\psi_i(x)\,a_{44}^{(i)}-\psi_j(x)a_{44}^{(j)}]\,\frac{dy}{ds}+[\varphi_i(y)\,a_{55}^{(i)}-$$

$$-\varphi_j(y)\,a_{55}^{(j)}]\,\frac{dx}{ds}+[\varphi_i(y)\,a_{45}^{(i)}-\varphi_j\,(y)\,a_{45}^{(j)}]\,\frac{dy}{ds}\,.$$

Итак, рассматриваемая задача сводится к определению в области поперечного сечения D_0 функции напряжений $\Psi\,(x,\,y)$, удовлетворяющей в соответствующих областях D_i дифференциальному уравнению (1.10), граничным условиям (1.12) и условиям (1.14) и (1.18) на линиях раздела L_{ij}.

Теперь выясним смысл C_0. Для этого составим смешанные вторые производные w_i при помощи (1.16)—(1.17) и, приравнивая их, найдем

$$a_{44}^{(i)}\frac{\partial^2\Psi_i}{\partial x^2}-2\,a_{45}^{(i)}\frac{\partial^2\Psi_i}{\partial x\partial y}+a_{55}^{(i)}\frac{\partial^2\Psi_i}{\partial y^2}=\frac{a_{45}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}}\,(A_0x-B_0y)+a_{44}^{(i)}\,\psi_i'\,(x)-$$

$$-a_{55}^{(i)}\varphi_i'(y)-\frac{\partial^2v_i}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2u_i}{\partial y\partial z}\,. \qquad (1.19)$$

Сравнивая (1.19) с (1.10), получим

$$-2\,\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}=(2\nu_{xz}B_0+\eta_{xy,\,z}A_0)\,x-(2\nu_{yz}\cdot A_0+\eta_{xy,\,z}\cdot B_0)\;y+C_0, \qquad (1.20)$$

где $\Omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x}-\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)$ — поворот элемента поперечного сечения около оси z. Интегрируя (1.20) по области D_0, получим ([9])

$$C_0+(2\nu_{xz}B_0+\eta_{xy,\,z}\,A_0)\cdot x_c^*-(2\nu_{yz}\cdot A_0+\eta_{xy,\,z}\cdot B_0)y_c^*=-2\Theta, \qquad (1.21)$$

где $\Theta=\frac{1}{s_0}\iint\limits_{D_0}\frac{\partial\Omega_z}{\partial z}\,dxdy$, s_0, x_c^* и y_c^* — площадь и координаты геометрического центра тяжести области D_0.

Нетрудно установить, что условие

$$C_0=(2\nu_{yz}\cdot A_0+\eta_{xz,\,z}\cdot B_0)\;y_c^*-(2\nu_{xz}\cdot B_0+\eta_{xy,\,z}\cdot\;A_0)\;\;x_c^* \qquad (1.22)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы поперечный изгиб анизотропного со тавного стержня не сопровождался кручением.

§ 2. *О решении задачи изгиба неортотропных составных призматических стержней*. Обозначим через μ малый параметр для области D_1

$$\mu = \frac{a_{45}^{(l)}}{\sqrt{a_{44}^{(l)}\, a_{55}^{(l)}}} < 1, \tag{2.1}$$

причем $\mu = 0$ для ортотропного материала. Затем введем новые переменные α и β [7, 8]

$$x = \alpha \quad y = \beta \sqrt{\frac{a_{55}^{(l)}}{a_{44}^{(l)}}}\,. \tag{2.2}$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.10) можно представить так

$$\frac{\partial^2 U_k}{\partial \alpha^2} - 2\mu \lambda_k \frac{\partial^2 U_k}{\partial \alpha \partial \beta} + \delta_k \cdot \frac{\partial^2 U_k}{\partial \beta^2} = F_{1k}(\alpha, \beta, a_{ij}^{(k)}) + \mu F_{2k}(\alpha, \beta, a_{ij}^{(k)}), \tag{2.3}$$

где

$$\Psi_k(x, y) = U_k(\alpha, \beta), \lambda_k = \frac{a_{45}^{(k)}\, a_{44}^{(l)}}{a_{45}^{(l)}\, a_{44}^{(k)}}, \quad \delta_k = \frac{a_{55}^{(k)}\, a_{44}^{(l)}}{a_{55}^{(l)}\, a_{44}^{(k)}}\,,$$

$$\gamma_k = \frac{a_{45}^{(k)}}{a_{45}^{(l)}} \sqrt{a_{44}^{(l)}\, a_{55}^{(l)}} \cdot \frac{1}{a_{33}^{(k)}}\,,$$

$$F_{1k}(\alpha, \beta, a_{ij}^{(k)}) = \frac{1}{a_{44}^{(k)}} \left\{ a_{44}^{(k)} \psi_k'(\alpha) - a_{55}^{(k)} \varphi_k'\left(\beta \sqrt{\frac{a_{55}^{(l)}}{a_{44}^{(l)}}}\right) + 2\left(\nu_{xz} B_0 \alpha - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \nu_{yz} A_0 \sqrt{\frac{a_{55}^{(l)}}{a_{44}^{(l)}}}\, \beta\right) + 2(\nu_{yz} \cdot A_0 \cdot y_c^* - \nu_{xz} \cdot B_0 x_c^*),\right.$$

$$F_{2k}(\alpha, \beta, a_{ij}^{(k)}) = \frac{1}{a_{44}^{(k)}} \left\{ \left(A_0 \alpha - B_0 \beta \sqrt{\frac{a_{55}^{(l)}}{a_{44}^{(l)}}} \right) (\sigma + \gamma_k) + \sigma (B_0 y_c^* - A_0 x_c^*) \right\}$$

$$\eta_{xy,z} = \sigma \cdot \mu.$$

Граничные условия (1.12) и условия (1.14) и (1.18) при помощи (2.2) можно представить

$$\frac{\partial U_i}{\partial s} = f_i \quad \text{на } L_0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial s} - \frac{\partial U_j}{\partial s} = f_i - f_j \quad \text{на } L_{ij}\,, \tag{2.5}$$

$$N_1[U]_i + \mu N_2[U]_i - N_1[U]_j - \mu N_2[U]_j = \bar{g}_{ij} + \mu \bar{\bar{g}}_{ij}\,, \text{ на } L_{ij} \tag{2.6}$$

где введены следующие обозначения

$$f_i = -\left[\frac{1}{2a_{33}^{(i)}} \left(B_0 \frac{a_{55}^{(l)}}{a_{44}^{(l)}} \beta^2 + K_0 \sqrt{\frac{a_{55}^{(l)}}{a_{44}^{(l)}}}\, \beta \right) + \psi_i(\alpha) \right] l_2 - \left[\frac{1}{2a_{33}^{(i)}} (A_0 \alpha^2 + \right.$$

$$\left. + K_0 \alpha) + \varphi_i \left(\beta \sqrt{\frac{a_{55}^{(l)}}{a_{44}^{(l)}}} \right) \right] l_1,$$

$$N_1[\ ]_i = a_{44}^{(i)} l_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \bar{a}_{55}^{(i)} l_2 \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad N_2[\ ]_i = -e_i \cdot \left(l_1 a_{44}^{(l)} \frac{\partial}{\partial \beta} + l_2 \sqrt{a_{44}^{(l)} a_{55}^{(l)}}\, \frac{\partial}{\partial \alpha} \right),$$

$$l_1 = \cos(n, x), \quad l_2 = \cos(n, y), \quad \bar{a}_{55}^{(i)} = a_{55}^{(i)} \sqrt{\frac{a_{44}^{(l)}}{a_{55}^{(l)}}}, \quad e_i = \frac{a_{45}^{(i)}}{a_{45}^{(l)}}\,,$$

$$\bar{g}_{ij} = \frac{1}{2}\left(B_0\beta^2 \cdot \frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)}} + K_0\beta\sqrt{\frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)}}}\right)\left(\frac{a_{44}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}} - \frac{a_{44}^{(j)}}{a_{33}^{(j)}}\right)l_1 - \frac{1}{2}(A_0\alpha^2 +$$

$$+ K_0\alpha)\left(\frac{a_{55}^{(i)}}{a_{33}^{(i)}} - \frac{a_{55}^{(j)}}{a_{33}^{(j)}}\right)l_2 + [\psi_i(\alpha)a_{44}^{(i)} - \psi_j(\alpha)\; a_{44}^{(j)}]\, l_1 -$$

$$-\left[\varphi_i\left(\beta\sqrt{\frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)}}}\right)a_{55}^{(i)} - \varphi_j\left(\beta\sqrt{\frac{a_{55}^{(j)}}{a_{44}^{(j)}}}\right)a_{55}^{(j)}\right] l_2,$$

$$\bar{\bar{g}}_{ij} = -\frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_j)\left(B_0\beta^2\frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)}} + K_0\beta\sqrt{\frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)}}}\right)l_2 + \frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_j)(A_0\alpha^2 +$$

$$+ B_0\alpha)\, l_1 - l_2\sqrt{a_{44}^{(i)}a_{55}^{(i)}}\,[e_i\psi_i(\alpha) - e_j\psi_j(\alpha)] + l_1\sqrt{a_{44}^{(i)}a_{55}^{(i)}}\left[e_i\varphi_i\left(\beta\sqrt{\frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)}}}\right) -\right.$$

$$\left. - e_j\varphi_j\left(\beta\sqrt{\frac{a_{55}^{(j)}}{a_{43}^{(j)}}}\right)\right].$$

Представим решение уравнения (2.3) в виде [7,8]

$$U_k(\alpha, \beta) = U_k^{(0)}(\alpha, \beta) + \sum_{l=1}^{\infty} U_k^{(l)}(\alpha, \beta)\cdot\mu^l \quad (k=1, 2, \cdots, n). \tag{2.7}$$

Из (2.7) и (2.3) находим

$$\Delta_k U_k^0 = F_{1k}(\alpha, \beta, a_{ij}^{(k)}) \quad (k=1, 2, \cdots, n), \tag{2.8}$$

$$\Delta_k U_k^1 = F_{2k}(\alpha, \beta, a_{ij}^{(k)}) + \rho_k^{(1)}(\alpha, \beta), \tag{2.9}$$

$$\Delta_k U_k^{(l)} = \rho_k^{(l)}(\alpha, \beta) \quad (l=2, 3, \cdots), \tag{2.10}$$

где

$$\rho_k^{(l)}(\alpha, \beta) = 2\lambda_k \frac{\partial^2 U_k^{(l-1)}}{\partial\alpha\partial\beta} \quad (l=1, 2, \cdots).$$

При помощи (2.1), (2.2) и (2.7) из (2.4), (2.5) и (2.6) получаются

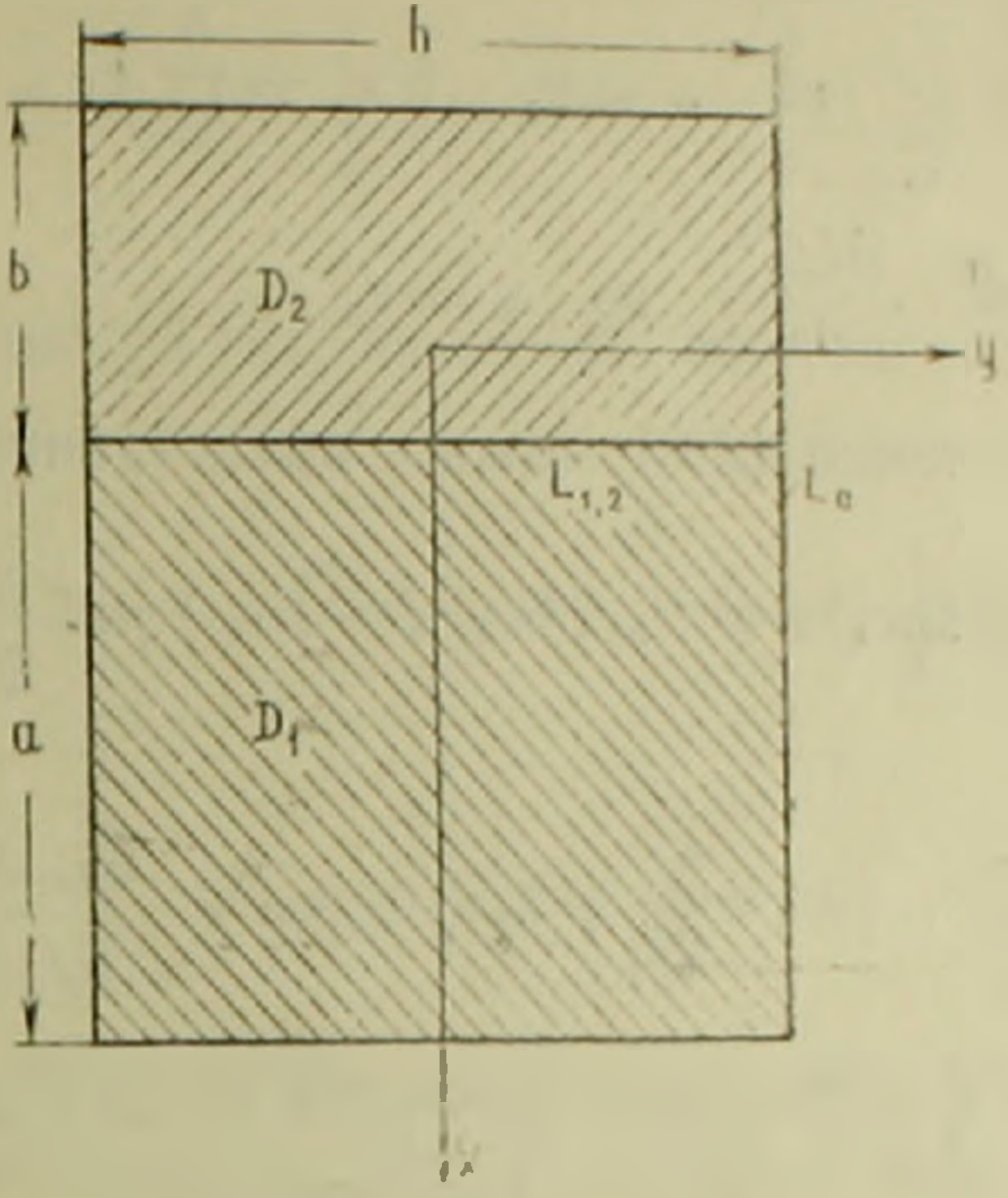
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_k^{(0)}}{\partial s} = f_k \quad (k=1, 2, \cdots, n) \\ &\frac{\partial U_k^{(l)}}{\partial s} = 0 \quad (l=1, 2, \cdots), \; (k=1, 2, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \text{ на } L_0 \tag{2.11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U_i^{(0)}}{\partial s} - \frac{\partial U_j^{(0)}}{\partial s} = f_i - f_j, \\ &\frac{\partial U_i^{(l)}}{\partial s} - \frac{\partial U_j^{(l)}}{\partial s} = 0 \quad (l=1, 2, \cdots); \end{aligned}\right| \text{ на } L_{ij} \tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &N_1[U^{(0)}]_i = N_1[U^{(0)}]_j + \bar{g}_{ij}, \\ &N_1[U^{(m)}]_i + N_2[U^{(m-1)}]_i = N_1[U^{(m)}]_j + N_2[U^{(m-1)}]_j + \bar{\bar{g}}_{ij} \\ &\qquad (m=1, 2, \cdots) \end{aligned}\right| \text{ на } L_{ij} \tag{2.13}$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения с неразделяющимися переменными (2.3) с условиями (2.4)–(2.6) приводится к рекуррентным дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными (2.8) — (2.10) с более простыми условиями (2.11) — (2.13).

§ 3. *Изгиб неортотропных двухслойных призматических стержней прямоугольного поперечного сечения* (фиг. 2). Если изгибающая



Фиг. 2.

сила направлена по оси x, изгиб составной консоли не будет сопровождаться кручением. В этом случае напряжение представим в таком виде

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz}^{(i)} &= \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} + \frac{1}{2a_{33}^{(i)}}\left(A_0 x^2 + 2K_0 x\right) + \varphi_i(y), \\ \tau_{yz}^{(i)} &= -\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} + \psi_i(x), \qquad (i=1,2) \end{aligned}\right| . \tag{3.1}$$

Для произвольных функций $\varphi_i(y)$ и $\psi_i(x)$ примем

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(y) &= -\frac{(b+2a)}{8a_{33}^{(I)}}\left[A_0(b+2a) + 4K_0\right],\quad \varphi_2(y) = -\frac{b}{8a_{33}^{(II)}}\left(A_0 b - 3K_0\right) \\ \psi_1(x) &= \psi_2(x) = 0. \end{aligned}\right| . \tag{3.2}$$

Вычисление показывает, что

$$x_0^* = \frac{a}{2},\quad y_c^* = 0,\quad B_0 = 0,\quad A_0 = -K_0 \cdot \frac{2(a_{33}^{II} + b a_{33}^{I})}{a(a+b)\, a_{33}^{II}}, \tag{3.3}$$

$$K_0 = \frac{6a\,(a+b)\,P a_{33}^{I}\,(a_{33}^{II})^2}{h(a a_{33}^{II} + b a_{33}^{I})\left[a a_{33}^{II}(4a^2 + 6ab + 3b^2) + b^3 a_{33}^{I}\right] - 3a^2 (a+b)^2 h\,(a_{33}^{II})^2}.$$

Для $U_k^{(0)}(\alpha, \beta)$ в каждой области D_k $(k=1, 2)$ нужно решить уравнение (2.8) с условиями

$$\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \alpha} = \frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{при } \beta = \pm \beta_1 \quad \left(\beta_1 = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{a_{44}^{(1)}}{a_{55}^{(1)}}}\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial \beta}=0 \quad \text{при } \alpha=\alpha_1 \left(\alpha_1=a+\frac{b}{2}\right), \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \beta}=0 \quad \text{при } \alpha=\alpha_2 \left(\alpha_2=-\frac{b}{2}\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial \beta}=\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \beta} \quad \text{на } \alpha=\alpha_3 \left(\alpha_3=\frac{b}{2}\right), \tag{3.7}$$

$$a_{44}^{(I)}\cdot\frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial \alpha}=a_{44}^{(II)}\cdot\frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial \alpha} \quad \text{на } \alpha=\alpha_3. \tag{3.8}$$

Решение уравнения (2.8) можно представить

$$U_k^{(0)}(\alpha,\beta)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(A_{kj}\,\mathrm{sh}c_{kj}\alpha+B_{kj}\,\mathrm{ch}c_{kj}\alpha-M_{kj}\right)\sin\frac{\pi j}{2\beta_1}(\beta+\beta_1)\;(k=1,2),$$

где (3.9)

$$M_{kj}=\frac{4\beta_1 a_{kj}}{\delta_k\pi^2 j^2},\quad c_{kj}=\frac{\pi j}{2\beta_1}\sqrt{\delta_k},\quad a_{kj}=-\frac{8\nu_{yz}A_0\beta_1}{\pi j\,a_{44}^{(k)}}\sqrt{\frac{a_{55}^{(I)}}{a_{44}^{(I)}}}. \tag{3.10}$$

Постоянные A_{kj} и B_{kj} определяются из (3.5)—(3.8). Второе приближение строим так. Подставляя выражения $U_k^{(0)}(\alpha,\beta)$ из (3.9) в (2.9), получим

$$\Delta_k U_k^{(1)}=\sum_{j=1}^{\infty}E_{jk}(\alpha)\cos\frac{\pi j(\beta+\beta_1)}{2\beta_1}+F_{2k}(\alpha,\beta,a_{n,m}^{(k)}), \tag{3.11}$$

где

$$E_{jk}(\alpha)=\frac{\lambda_k\pi j c_{kj}}{\beta_1}(A_{kj}\,\mathrm{ch}c_{kj}\alpha+B_{kj}\,\mathrm{sh}c_{kj}\alpha),\quad F_{2k}=\frac{A_0}{a_{44}^{(k)}}\left[\alpha(\sigma+\gamma_k)-\frac{\sigma a}{2}\right]. \tag{3.12}$$

Из (2.11) — (2.13) для $U_k^{(1)}(\alpha,\beta)$ будем иметь следующие граничные условия

$$\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \alpha}=\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \alpha}=0 \quad \text{при } \beta=\pm\beta_1, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \beta}=0 \quad \text{при } \alpha=\alpha_1, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \beta}=0 \quad \text{при } \alpha=\alpha_2, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \beta}=\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \beta} \quad \text{на } \alpha=\alpha_3, \tag{3.16}$$

$$\frac{a_{44}^{(I)}}{a_{44}^{(II)}}\cdot\frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial \alpha}=\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial \alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}Q_n(c_{1n},c_{2n},\alpha)\sin\frac{\pi n(\beta+\beta_1)}{2\beta_1} \quad \text{на } \alpha=\alpha_3, \tag{3.17}$$

где

$$Q_n=\frac{a_{44}^{(I)}}{a_{44}^{(II)}}\left[\overline{B}_{n1}(\alpha)-e_2\overline{B}_{n2}(\alpha)\right],\quad \overline{B}_{nk}(\alpha)=-\frac{1}{\beta_1^2}\sum_{j=1,3}^{\infty}\frac{nj}{j^3-n^3}(A_{kj}\,\mathrm{sh}c_{kj}\alpha+$$

$$+B_{kj}\,\mathrm{ch}\,c_{kj}\alpha-M_{kj})\qquad(n=2,4,\cdots).$$

Решение дифференциального уравнения (3.12) представим в виде

$$U_k^{(1)}(\alpha, \beta) = \sum_n^{\sim} w_{nk}(\alpha) \sin \frac{\pi n (\beta + \beta_1)}{2\beta_1} \quad (k = 1, 2). \tag{3.18}$$

Из (3.18) и (3.11) находим

$$w''_{nk} - \delta_k \left(\frac{\pi n}{2\beta_1}\right)^2 w_{nk} = \bar{Q}_{nk}(\alpha) \quad \left[\bar{Q}_{nk}(\alpha) = -\frac{2}{\pi \beta_1} \sum_{j=1,3}^{\sim} E_{jk}(\alpha) \frac{n}{j^2 - n^2}\right]. \tag{3.19}$$

Решив уравнение (3.19), из (3.18) получаем для $U_k^{(1)}(\alpha, \beta)$ следующее выражение

$$U_k^{(1)}(\alpha', \beta) = \sum_{n=2,4}^{\sim} \left| \bar{C}_{nk} \operatorname{sh} c_{kn} \alpha + \bar{D}_{nk} \operatorname{ch} c_{kn} \alpha + d_{kn}(\alpha) \right| \sin \frac{\pi n (\beta + \beta_1)}{2\beta_1}, \tag{3.20}$$

где

$$d_{kn}(\alpha) = \sum_{j=1,3}^{\sim} (R_{nkj} \operatorname{ch} c_{kj} \alpha + T_{nkj} \operatorname{sh} c_{nj} \alpha),$$

$$R_{nkj} = \frac{2\mu_k n j c_{kj}}{\beta_1^2 (n^2 - j^2)} \cdot \frac{A_{kj}}{c_{kj} - \delta_k \left(\frac{\pi n}{2\beta_1}\right)^2}, \quad T_{nkj} = \frac{2\mu_k n j c_{kj}}{\beta_1^2 (n^2 - j^2)} \cdot \frac{B_{kj}}{c_{kj} - \delta_k \left(\frac{\pi n}{2\beta_1}\right)^2}.$$

Постоянные $\bar{C}_{nk}$ и $\bar{D}_{nk}$ определяются из (3.14)—(3.16).

Таким образом, имея $U_k^{(1)}(\alpha, \beta)$, при помощи (2.10)—(2.13) аналогично можно построить решения и в последующих приближениях.

Ереванский государственный университет
Институт математики и механики Академии наук
Армянской ССР

Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

Բազմաշերտ ոչ օրթոտրոպ պրիզմատիկ ձողերի ծռումը

Դիտարկված է տարբեր նյութերից կազմված ոչ օրթոտրոպ (ամեն մի կետում ծնորդին ուղղահայաց առաձգականության մեկ սիմետրիայի հարթություն ունեցող) պրիզմատիկ ձողերի ծռման խնդիրը:

Ընդունելով $\tau^i_{xz} = \tau_{xz}$, $\tau^i_{yz} = \tau_{yz}$, $\tau^i_{xy,z} = \tau_{xy,z}$ ($i = 1, 2, \ldots n$) ստացված են հիմնական դիֆերենցիալ հավասարումները և անհրաժեշտ պայմանները, որոնց օգնությամբ միարժեք կերպով որոշվում են լարվածության ֆունկցիաները տված տիրույթներում:

Առաջարկված է խնդրի լուծման եղանակ:

Այդ եղանակով, ստացված չանջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումները բերվում են անջատվող փոփոխականներով դիֆերենցիալ հավասարումների անվերջ սիստեմի:

Որպես կիրառություն լուծված է երկշերտ ուղղանկյուն ընդլայնական կտրվածք ունեցող ոչ օրթոտրոպ ձողի ծռման խնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954. [2] *К. И. Борш*, Studii şi cercetări ştiinţ. Acad. RPR Fil. Iaşi, Mat., 1957, VIII, № 2, 163—190. [3] *К. С. Чобанян*, ДАН АрмССР, т. XXII, № 3 (1956). [4] *К. С. Чобанян*, Известия АН АрмССР, т. XI, № 5 (1958). [5] *Н. Х. Арутюнян*, *К. С. Чобанян*. „Известия АН АрмССР", т. X, № 5, (1957). [6] *С. Г. Лехницкий*, Теория упругости анизотропного тела, Гостехтеориздат, М.—Л., 1950. [7] *В. С. Саркисян* „Известия АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 2, 1963. [8] *В. С. Саркисян* „Известия АН АрмССР", т. XV, № 5 (1962). [9] *А. Н. Динник*, Продольный изгиб. Кручение, Изд. АН СССР, М., 1955.