ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIX 1964 4

МАТЕМАТИКА

С. Г. Овсепян

О порождающем множестве граничных точек в задаче Дирихле для уравнения колебания струны в многосвязных областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 18/VI 1964)

В настоящей заметке изучается следующая задача Дирихле

$$(1+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

$$u\Big|_{\Gamma}=\varphi(s) \tag{2}$$

в ограниченной многосвязной области D с границей Γ, где λ — вещественный параметр с модулем меньшим единицы.

Хорошо известно, что для гиперболических уравнений краевые задачи с заданием на полной границе не являются корректными. Тем не менее изучению таких задач посвящен ряд работ советских и зарубежных авторов ([1-4] и др.).

Как сама задача (1), (2), так и порожденные ею спектральные разложения достаточно полно исследованы в работах Р. А. Александряна в том случае, когда рассматриваемая область является выпуклой.

Оказалось, что в этом случае все связанные с задачей (1), (2) существенные результаты могут быть сформулированы в терминах специальных топологических отображений границы области на себя.

В частности, в работе ([4]) введено понятие порождающего множества граничных точек, выяснена его роль, и построено это множество в случае выпуклых областей.

Наша цель — исследовать соответствующие вопросы в случае невыпуклых и многосвязных областей.

То обстоятельство, что характеристики уравнения (1) в рассматриваемых нами случаях пересекают границу области в более чем двух точках, естественным образом усложняет исследование, однако путем некоторых дополнительных построений удается выделить части границы области, где ситуация аналогична случаю выпуклых областей. В остальной части границы обстоятельство совершенно иное.

Построение порождающего множества дает возможность установить некоторые теоремы единственности, а также построить всю совокупность обобщенных собственных фукций, отвечающих фиксированным значениям числового параметра λ.

Хорошо известно [1], что задача Дирихле (1), (2) для прямоугольных областей неустойчива по отношению к изменению области, а именно при $\lambda = 0$, если отношение сторон прямоугольника иррационально, то не может быть двух различных решений, тогда как при рациональном отношении сторон соответствующая однородная задача имеет нетривиальные решения.

Оказывается, что это обстоятельство имеет место не только для прямоугольных областей, но и для любой ограниченной многосвязной области D с кусочно-гладкой границей Γ, а именно, для любой такой области и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать области D_1 и D_2 с границами Γ_1 и Γ_2 такие, что расстояние границ Γ_1 и Γ_2 от Γ меньше чем ε и решение задачи (1), (2) в области D_1 единственно, а в D_2 нет единственности*.

Пусть $y - \mu x = \mathrm{const}$ (соответственно $y + \mu x = \mathrm{const}$) — первое (соответственно второе) семейство вещественных характеристик уравнения (1), где положено $\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda} = \mu^2$.

Точку $p \in \Gamma$ назовем λ-вершиной области D (или границы Γ), если хотя бы одна из двух характеристик уравнения (1), проходящих через точку p в некоторой окрестности этой точки, целиком лежит либо вне D, либо на $D + \Gamma$.

Многосвязную область D с кусочно-гладкой границей Γ назовем λ-допустимой, если она имеет конечное число λ-вершин и каждая характеристика уравнения (1) пересекает ее границу лишь в конечном числе точек.

Назовем характеристическими отрезками области D те отрезки характеристик уравнения (1), целиком принадлежащие $D + \Gamma$, концы которых принадлежат границе Γ.

Для выпуклых областей Р. А. Александряном [3, 4] было дано два различных обобщения понятия решения краевой задачи (1), (2) и доказана их эквивалентность. Аналогом этих обобщений для краевой задачи (1), (2) в многосвязных областях будут:

Определение 1. Пусть $\varphi(s)$ суммируемая на Γ функция. Суммируемую в D функцию $u(x, y)$ назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если она удовлетворяет интегральному соотношению

$$\iint_D u(x, y) \left[(1+\lambda) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - (1-\lambda) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] dx dy =$$

---

* Если потребовать не только близость границ, но и близость соответствующих касательных к ним, то, как показал Ю. М. Березанский [5], можно построить специальные области, в которых задача (1), (2) устойчива.

$$= \int_{\Gamma} \sigma(s) \left[(1+\lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) - (1-\lambda) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(n, y) \right] ds \qquad (3)$$

для любой функции $\varphi(x, y) \in \Phi_0(D)$, где $\Phi_0(D)$ множество всех гладких в D функций, исчезающих на границе Γ.

Определение 2. Суммируемую в D функцию $u(x, y)$ назовем обобщенным решением задачи (1), (2), если она представима в виде суммы двух суммируемых в D функций

$$u(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

где $f(x, y)$ постоянна на почти всех характеристических отрезках первого семейства характеристик, а $g(x, y)$ на почти всех характеристических отрезках второго семейства характеристик и если на границе Γ $u(x, y)$ почти везде равна $\sigma(s)$.

Лемма 1. *Из того, что $u(x, y)$ является обобщенным решением задачи* (1), (2) *в смысле определения* 1, *следует, что она является обобщенным решением той же задачи в смысле определения* 2, *и наоборот.*

Можно доказать аналогично тому, как это сделано в работе ([3]), что если обобщенное решение задачи (1), (2) является гладкой функцией, то оно является решением в классическом смысле.

Как было указано выше, построение порождающего множества граничных точек играет принципиальную роль в исследовании задач типа Дирихле для уравнения (1). В этой работе мы укажем способ построения порождающего множества в случае класса многосвязных допустимых областей в терминах специальных отображений границы области на себя. Для этой цели нам понадобится ввести ряд определений и понятий.

Рассмотрим два отображения S_λ^+ и S_λ^- границы Γ на себя. Образом исходной точки 0 при отображении S_λ^+ (соответственно S_λ^-) будем понимать второй конец каждого характеристического отрезка первого семейства характеристик (соответственно второго семейства характеристик), первый конец которого совпадает с точкой 0. Если для исходной точки характеристический отрезок вырождается в точку, то образом ее считается она сама.

Заметим, что в рассматриваемых нами случаях, в отличие от случая выпуклой области, отображения S_λ^+ и S_λ^- определяются, вообще говоря, неоднозначно.

Назовем λ-циклом, порожденным граничной точкой 0, совокупность всех граничных точек, получаемых из исходной точки 0 путем поочередного применения отображений S_λ^+, S_λ^- или наоборот, причем на каждом шаге применения многозначных отображений S_λ^+, S_λ^- понимается некоторый определенный образ.

Цикл называется замкнутым, если он состоит из конечного числа точек.

Точку $\theta \in \Gamma$ назовем периодической, если все порожденные ею λ-циклы замкнутые, полупериодической, если среди λ-циклов есть замкнутый цикл, и непериодической, если среди λ-циклов нет замкнутого цикла.

Если периодическая точка θ порождает только один λ-цикл, то число точек этого цикла называется периодом точки θ.

Заданная на Γ функция f называется инвариантной относительно отображения S, если для любой точки $\theta \in \Gamma$ она удовлетворяет условию

$$f(\theta) = f(S\theta).$$

Пусть K — некоторый класс функций, определенных на Γ. Множество точек $E \subset \Gamma$ называется множеством единственности для класса K, если из того, что инвариантная относительно S_λ и $S_{\bar\lambda}$ функция $f \in K$ равна нулю на множестве E, следует, что она равна нулю тождественно.

Множество $F \subset \Gamma$ называется множеством продолжимости для класса K, если для произвольной функции $g \in K$ существует инвариантная относительно S_λ^+ и $S_{\bar\lambda}^-$ функция f из K, которая на множестве F совпадает с g.

Множество $\gamma \subset \Gamma$ называется порождающим для класса K, если оно является как множеством единственности, так и множеством продолжимости.

Обозначим через $K(D)$ множество всех обобщенных решений

$$\{u(x, y) = f(x, y) + g(x, y)\}$$

задачи (1), (2) для которых $f(s), g(s) \in K$.

Легко убедиться, что значения лишь одной компоненты f или g решения $u \in K(D)$ на порождающем множестве единственным образом определяют $u(x, y)$ во всем D.

Очевидно, что любое расширение множества единственности снова будет множеством единственности и любое сужение множества продолжимости снова будет множеством продолжимости. Поэтому для существования порождающего множества необходимо и достаточно, чтобы существовало столь „узкое“ множество единственности E и настолько „широкое“ множество продолжимости F, чтобы $E \subseteq F$.

В дальнейшем под K будем понимать класс функций, определенных на Γ, для которых в каждой точке Γ существуют односторонние предельные значения. Легко видеть, что функции из K могут иметь разве лишь счетное число точек разрыва и, следовательно, K входит в первый класс Бэра. Две функции из K будем считать эквивалентными, если они могут отличаться не более, чем на счетном множестве точек.

Пусть $m(p, \lambda, \Gamma)$ — совокупность всех λ-циклов точки p. Две точки p_1 и p_2 назовем λ-эквивалентными, если множества $m(p_1, \lambda, \Gamma)$ и $m(p_2, \lambda, \Gamma)$ совпадают или если существует граничная точка, которая является предельной точкой с одной и той же стороны для этих множеств.

Обозначим через N_λ множество всех λ-вершин, а через $N_\lambda^{(0)}$ множество всех периодических λ-вершин.

Пусть B_k — подмножество множества $N_\lambda - N_\lambda^{(0)}$, состоящее из всех тех λ-вершин, каждая из которых λ-эквивалентна с некоторой точкой множества B_{k-1} ($k = 2, 3, \cdots, q$), причем за B_1 возьмем некоторую точку p_1 из $N_\lambda - N_\lambda^{(0)}$.

Пусть

$$N_\lambda^{(1)} = \bigcup_{k=1}^{q} B_k.$$

Совершенно аналогично, исходя из некоторой точки $p_i \in N_\lambda - \bigcup_{k=0}^{i-1} N_\lambda^{(k)}$, образуем множество $N_\lambda^{(i)}$ ($i = 2, 3, \cdots, l$).

Таким образом,

$$N_\lambda = \bigcup_{k=0}^{l} N_\lambda^{(k)},$$

причем при $i \neq j$ каждая точка множества $N_\lambda^{(i)}$ λ-неэквивалентна с каждой точкой множества $N_\lambda^{(j)}$.

Множество дуг на Γ называется инвариантным относительно S_λ^+ и S_λ^-, если образы этих дуг при отображениях S_λ^+ и S_λ^- принадлежат этому множеству дуг. Аналогичным образом определяется инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- множество точек на Γ.

Пусть M_λ — множество точек, образованное всеми λ-циклами всех вершин, тогда дополнение замыкания этого множества состоит из не более чем счетного числа открытых дуг

$$C\overline{M}_\lambda = \bigcup_{(k)} d_k.$$

Доказывается, что совокупность всех этих дуг d_k инвариантна относительно S_λ^+ и S_λ^- и что каждая из этих дуг является либо непериодической, либо периодической, причем число последних конечно. Для выпуклой области D такие периодические дуги (как и все периодические точки) имеют один и тот же период. Доказывается, что для многосвязных допустимых областей хоть и λ-неэквивалентные периодические дуги могут иметь разные периоды, однако все периодические точки λ-эквивалентных дуг имеют один и тот же период и что все точки одной и той же непериодической дуги из $C\overline{M}_\lambda$ λ-эквивалентны некоторой точке из $N_\lambda^{(i)}$ при одном и только одном i ($i = 1, 2, \cdots, l$).

Пусть

$$F_\lambda^{(i)} = H_\lambda^{(i)} + \overline{M}_\lambda^{(i)} - \bigcup_{j \neq i} M_\lambda^{(j)}, \quad (i = 1, 2, \cdots, l, \ \ j = 0, 1, 2, \cdots, l),$$

где $M_\lambda^{(0)}$ — множество всех периодических точек из $\overline{M}_\lambda$, $M_\lambda^{(i)}$ — совокупность всех λ-циклов точек $N_\lambda^{(i)}$, а $H_\lambda^{(i)}$ — совокупность точек всех тех непериодических дуг из $C\overline{M}_\lambda$, которые λ-эквивалентны некоторой точке из $N_\lambda^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$.

Рассмотрим некоторую совокупность всех λ-неэквивалентных между собой периодических дуг из $C\overline{M}_\lambda$. Оказывается, что дополнение множества $A_\lambda(d_p)$ всех периодических точек для каждой дуги d_p из этой совокупности состоит из не более чем счетного числа открытых периодических дуг

$$CA_\lambda(d_p) = \bigcup_{(l)} d_l^{(p)}.$$

Пусть теперь γ_λ — совокупность граничных точек, которая получается путем присоединения к сумме $\bigcup\limits_{(p)} A_\lambda(d_p)$ периодических точек всех дуг d_p из вышеуказанной совокупности по одной точке (например, середины) из каждой дуги $d_l^{(p)}$ и по одной точке из $F_\lambda^{(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, l)$.

Имеет место следующая основная

Теорема 1. *Для любой λ-допустимой области D с границей Γ построенное множество γ_λ граничных точек является порождающим множеством для класса K.*

Теорема 2. *Для единственности обобщенного решения краевой задачи* (1), (2) *в классе $K(D)$ необходимо и достаточно, чтобы γ_λ состояло из одной точки.*

Пусть $A_\lambda(\gamma)$ — множество всех периодических точек из γ_λ.

Теорема 3. *Для конечнократности собственного значения λ однородной задачи* (1), (2) *в классе $K(D)$ необходимо и достаточно, чтобы $A_\lambda(\gamma)$ состояло из конечного числа точек, при этом кратность собственного значения λ меньше числа точек γ_λ, не принадлежащих $A_\lambda(\gamma)$ на единицу.*

Значение числового параметра λ_0 называется эргодическим для данной области D, если множество соответствующих полупериодических точек пусто.

Теорема 4. *При всех эргодических значениях числового параметра λ обобщенное решение краевой задачи* (1), (2) *для допустимой области D единственно в классе $K(D)$.*

Замечание. Если при эргодическом значении λ для допустимой области D существует граничная точка с плотным на Γ λ-циклом, то единственность краевой задачи (1), (2) имеет место в первом классе Бэра. Это следует из следующей леммы.

Лемма 2. *При эргодическом значении λ для допустимой области D либо λ-цикл каждой граничной точки всюду плотен на Γ, либо не существует граничная точка с плотным на Γ λ-циклом.*

Теорема 5. *Для любой допустимой области D кусочно-постоянные собственные функции (принимающие только три значения 0 и ± 1), соответствующие собственному значению λ, полны* *в смысле равномерной сходимости в классе всех собственных функций из $K(D)$, соответствующих этому же собственному значению λ.*

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим один простой пример. Пусть R—прямоугольник с длинами сторон a и b. Разделим его на конечное число равных прямоугольников, разделив его стороны соответственно на n и m равных частей, где n и m — произвольные натуральные числа. Пусть Ω — область, полученная из R путем выбрасывания некоторого числа маленьких прямоугольников, а Γ — граница полученной области. Доказывается, что если отношение $\frac{\mu a}{b}$ рационально, то λ — неэргодическое, а если отношение $\frac{\mu a}{b}$ иррационально, то λ — эргодическое, причем λ — цикл любой граничной точки всюду плотен на Γ.

Таким образом, заключаем, что для единственности в первом классе Бэра обобщенного решения краевой задачи (1), (2) в области Ω необходимо и достаточно, чтобы отношение $\frac{\mu a}{b}$ было иррационально.

Следствие. Задача Дирихле (1), (2) неустойчива по отношению к изменению области в том смысле, что для любой ограниченной многосвязной области D с кусочно-гладкой границей существуют сколь угодно близкие области Ω_1 и Ω_2 такие, что решение задачи (1), (2) в области Ω_1 единственно в первом классе Бэра, а в Ω_2, наоборот, нет единственности.

Действительно, любую такую область можно аппроксимировать с любой степенью точности областями Ω, полученными вышеуказанным способом из прямоугольников R как с рациональным, так и иррациональным отношением $\frac{\mu a}{b}$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

Բազմակապ տիրույթներում լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի եզրային կետերի ծնող բազմության մասին

Աշխատության մեջ սահմանափակ D տիրույթում դիտարկվում է Դիրիխլեի հետևյալ խնդիրը

$$(1+\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(1-\lambda)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

$$u\big|_{\Gamma}=\varphi(s) \tag{2}$$

որտեղ λ-ն բացարձակ արժեքով մեկից փոքր իրական պարամետր է։

Այն դեպքում, երբ D տիրույթը ուռուցիկ է, ինչպես (1) (2) խնդիրը, նույնպես և նրանից բխող սպեկտրալ վերլուծությունները բավական լրիվ ուսումնասիրված են Ռ. Ա. Ալեքսանդրյանի աշխատություններում։ Մասնավորապես Ռ. Ա. Ալեքսանդրյանի կողմից մտցվել է (1) (2) խնդրի եզրային կետերի ձնող բազմության գաղափարը, պարզաբանվել նրա դերը և կառուցվել է այդ բազմությունը ուռուցիկ տիրույթների համար։

Ներկա աշխատության մեջ կտոր առ կտոր ողորկ եզրեր ունեցող վերջավոր կապակցված տիրույթների համար տրվում է (1) (2) խնդրի եզրային կետերի ձնող բազմության կառուցելու մեթոդ։

Այդ բազմության կառուցումը հնարավորություն է տալիս ապացուցելու մի քանի միակության թեորեմներ, ինչպես նաև կառուցելու տվյալ սեփական արժեքին համապատասխանող բոլոր սեփական ֆունկցիաները։

Ապացուցվում է նաև, որ (1) (2) եզրային խնդիրը կայուն չէ տիրույթի փոփոխման նկատմամբ հետևյալ իմաստով։

Ամեն մի կտոր առ կտոր ողորկ եզրեր ունեցող բազմակապ D տիրույթի համար կարելի է ցույց տալ այդ տիրույթին ցանկացած չափով մոտ D_1 և D_2 տիրույթներ այնպես, որ (1) (2) խնդրի լուծումը D_1 տիրույթում միակը լինի, իսկ D_2 տիրույթում միակություն չլինի։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *D. Bourgin, R. Duffin.* Bull. Amer. Math. Soc. 45(1939), 851—859. [2] *Ф. Джон.* Amer. Journ. of Math. 63, № 1 (1941), 141. [3] *Р. А. Александрян.* Диссертация, МГУ, 1949. [4] *Р. А. Александрян.* Докторская диссертация, МГУ, 1962. [5] *Ю. М. Березанский,* Укр. матем. журн., 12, 4 (1960).