

МЕХАНИКА.

С. А. Амбарцумян, чл.-корр. АН Армянской ССР, и Г. Е. Багдасарян

Флаттер пластинки, находящейся в поле действия температуры

(Представлено 2 IV 1964)

1. Рассматривается изотропная пластинка постоянной толщины h , отнесенная к декартовым координатам x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью xOy . Принимается, что от температуры $T = T(z, t)$ зависит лишь модуль упругости материала пластинки E .

Пусть пластинка обтекается сверхзвуковым потоком сжимаемого газа с невозмущенной скоростью U , направленной вдоль оси Ox .

В основу последующих рассуждений ставятся следующие известные гипотезы:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях ⁽¹⁾;
- б) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры в бесконечно малом элементе пластинки ⁽²⁾;
- в) „закон плоских сечений“ при определении аэродинамического давления ⁽³⁾.

На основе принятых предположений исходное дифференциальное уравнение движения пластинки запишется следующим образом ⁽⁴⁾

$$D(t) \Delta \Delta w + \delta_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Z, \quad (1.1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$D(t) = E(t) h^3 / 12 (1 - \nu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластинки, ν — коэффициент Пуассона, w — прогиб пластинки, δ_0 — плотность материала пластинки, Z — нормально приложенная внешняя нагрузка ⁽⁵⁾

$$Z = -2\delta_0 h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla p. \quad (1.2)$$

Здесь ε — коэффициент линейного затухания. ∇p — избыточное давление газа, которое, согласно „поршневой теории“, имеет вид

$$\nabla p = - \frac{\gamma p_\infty}{a_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad (1.3)$$

где p_0 — давление невозмущенного потока газа, a_0 — скорость звука для невозмущенного потока, κ — показатель политропы.

2. Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$w = f(t) e^{-i \frac{\pi}{\lambda_x} x} \sin \frac{\pi y}{\lambda_y}. \quad (2.1)$$

Здесь $f(t)$ — некоторая комплексная функция действительного аргумента, λ_x и λ_y — соответственно длины полуволны в направлениях x и y .

Подставляя (2.1) в (1.1), с учетом (1.2) и (1.3), для определения $f(t)$ получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \left(2\varepsilon + \mu \right) \frac{df}{dt} + \frac{D(t)}{\delta_0 h} \left[\left(\frac{\pi^2}{\lambda_x^2} + \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \right)^2 \right] f(t) - i \frac{\mu \pi}{\lambda_x} U f(t) = 0, \quad (2.2)$$

где

$$\mu = \frac{\kappa p_0}{\delta_0 h a_0}.$$

Подстановкой

$$f(t) = \varphi(t) e^{-(\varepsilon + \mu/2)t} \quad (2.3)$$

из (2.2) получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \delta^2 \varphi(t) = 0, \quad (2.4)$$

$$\varphi(t) = \frac{E(t) h^3 g}{E_0} \left(\frac{\pi^2}{\lambda_x^2} + \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \right)^2 - \frac{12 \gamma_0 h (1 - \nu^2)}{E_0} \left[(\varepsilon + \mu/2)^2 + i \frac{\mu \pi}{\lambda_x} U \right],$$

$$\delta^2 = \frac{E_0}{12 \gamma_0 h (1 - \nu^2)}, \quad (2.5)$$

где E_0 — начальный модуль упругости, γ_0 — удельный вес материала, g — ускорение силы тяжести.

Уравнение (2.4) будем решать методом асимптотического интегрирования. Множитель последнего члена уравнения (2.4), т. е. δ , является большим параметром, в силу этого решение уравнения (2.4) будем искать в виде (6, 7)

$$\varphi = \varphi_0(\delta, t) e^{\omega(t)}, \quad (2.6)$$

где $\varphi_0(\delta, t)$ — функция интенсивности, $\omega(t)$ — функция изменяемости. Функцию интенсивности представим в виде асимптотического ряда

$$\varphi_0(\delta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta^n} V_n(t). \quad (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (2.4) и требуя, чтобы коэффициенты при всех степенях δ обращались в нули, получим бесконечную систему рекуррентных дифференциальных уравнений для определения $\omega(t)$, $V_0(t)$, $V_1(t)$, ..., $V_n(t)$, ...

$$\begin{aligned}
V_0(t) \left[\frac{d\omega}{dt} \right]^2 + V_0(t) \dot{\psi}(t) &= 0, \\
2 \frac{d\omega}{dt} \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2\omega}{dt^2} V_0(t) &= 0, \\
2 \frac{d\omega}{dt} \frac{dV_n}{dt} + \frac{d^2\omega}{dt^2} V_n(t) &= - \frac{d^2 V_{n-1}}{dt^2} \\
(n=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Ограничиваясь первым приближением, получим

$$\left[\frac{d\omega}{dt} \right]^2 = -\dot{\psi}(t), \tag{2.9}$$

$$2 \frac{d\omega}{dt} \frac{dV_0}{dt} + \frac{d^2\omega}{dt^2} V_0(t) = 0. \tag{2.10}$$

Из (2.9) для функции изменяемости находим

$$\omega_{1,2}(t) = \pm \int_0^t \sqrt{V \dot{\psi}(t)} dt + c_0. \tag{2.11}$$

где c_0 — постоянная интегрирования.

Подставляя (2.11) в (2.10), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $V_0(t)$, общее решение которого имеет вид

$$V_0(t) = c \dot{\psi}^{-1/4}(t), \tag{2.12}$$

где c также постоянная интегрирования.

Подставляя значения ω и V_0 соответственно из (2.11) и (2.12) в (2.6), с учетом (2.3), в первом приближении для $f(t)$ получим*

$$f(t) = \dot{\psi}^{-1/4} \left[c_1 e^{i\beta(t) - (1+\mu/2)t} + c_2 e^{-i\beta(t) - (1+\mu/2)t} \right], \tag{2.13}$$

где

$$\beta(t) = i \int_0^t \sqrt{V \dot{\psi}(t)} dt = \beta_1(t) + i\beta_2(t) \tag{2.14}$$

$c_1 = a_1 + ib_1$, $c_2 = a_2 + ib_2$ — произвольные комплексные постоянные.

Характер функции $f(t)$ зависит как от скорости набегающего потока U , так и от изменения модуля упругости $E(t)$. Если модуль амплитуды $f(t)$ в течение времени возрастает, то будем считать, что пластинка находится в неустойчивом состоянии. В противном случае состояние пластинки является устойчивым. Скорость потока $U_{кр}$, при котором $\frac{d}{dt} |f(t)| = 0$, будем называть критической.

* Отметим, что, пользуясь уравнениями (2.8), можно найти любое приближение асимптотического интегрирования.

3. Для выяснения характера функции $f(t)$ от времени необходимы: аналитическая зависимость модуля упругости материала пластинки от температуры, а также закон изменения температуры во времени t .

Как показывают экспериментальные исследования^(8,9), модули упругости различных материалов, в зависимости от температуры, с достаточно высокой точностью можно аппроксимировать зависимостями

$$E = E_0 - E_0^* T, \quad (3.1)$$

$$E = E_0 - E_1^* T^2 \quad (3.2)$$

$$E = E_0 e^{-\lambda^* T}, \quad (3.3)$$

где E_0^* , E_1^* , λ^* — некоторые коэффициенты, определяемые из эксперимента.

Пусть средняя температура пластинки изменяется по закону (8)

$$T = At, \quad A = T_{max} t_1^{-1} \quad (0 \leq t \leq t_1), \quad (3.4)$$

где A — постоянный коэффициент пропорциональности, T_{max} — максимально достигаемая температура пластинки, t_1 — время, необходимое для достижения температуры T_{max} .

В силу (3.4) из (3.1), (3.2) и (3.3) соответственно получим

$$E = E_0 - E_1 t, \quad (3.5)$$

$$E = E_0 - E_2 t^2, \quad (3.6)$$

$$E = E_0 e^{-\lambda_1 t}, \quad (3.7)$$

где

$$E_1 = AE_0^*, \quad E_2 = A^2 E_1^*, \quad \lambda_1 = \lambda^* A. \quad (3.8)$$

4. Рассмотрим случай, когда $E(t)$ определяется формулой (3.5). Тогда из (2.13) и (2.14) с учетом (2.5) для $f(t)$ и $\beta(t)$ имеем*

$$f(t) = r^{-1/4} e^{-\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \left[\left(\cos \frac{\alpha + 2\pi j}{4} - i \sin \frac{\alpha + 2\pi j}{4} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(c_1 e^{i\beta_1(t)} + c_2 e^{-i\beta_1(t)} e^{2\beta_2(t)} \right) \right], \quad (4.1)$$

$$\beta(t) = -\frac{2\delta}{3\alpha} \left[r^{3/2} \left(\cos \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} - i \sin \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} \right) - \right. \\ \left. - r_0^{3/2} \left(\cos \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} - i \sin \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} \right) \right], \quad (4.2)$$

$$(j = 0, 1, 2, 3; k = 0, 1)$$

где

$$r^2(t) = \frac{1}{E_0^2} \left[B^2(t) + F^2 U^2 \right],$$

* Укажем, что в этом частном случае уравнение (2.2) может быть решено точно (*).

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{FU}{B(t)},$$

$$a = \frac{E_1}{E_0} h^3 g \left(\frac{\pi^2}{\lambda_x^2} + \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \right)^2, \quad (4.3)$$

$$B(t) = \frac{E_0 - E_1 t}{E_1} E_0 a - 12\gamma_0 h (1 - \nu^2) (\varepsilon + \mu/2)^2,$$

$$F = 12\gamma_0 h (1 - \nu^2) \frac{\pi \mu}{\lambda_x}.$$

$$r_0 = r(0), \quad \alpha_0 = \alpha(0).$$

Следовательно, для $\beta_1(t)$ и $\beta_2(t)$ имеем

$$\beta_1(t) = -\frac{2\delta}{3a} \left(r^{3/2} \cos \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} - r_0^{3/2} \cos \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} \right), \quad (4.4)$$

$$\beta_2(t) = \frac{2\delta}{3a} \left(r^{3/2} \sin \frac{3\alpha + 2k\pi}{2} - r_0^{3/2} \sin \frac{3\alpha_0 + 2k\pi}{2} \right).$$

Как было указано выше, критическая скорость флаттера определяется из условия*

$$\left. \frac{d}{dt} f(t) \right| = 0, \quad (4.5)$$

которое после раскрытия имеет вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \left\{ r^{-1/4} e^{-\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \left[\left(e^{2\beta_1(t)} (a_2 \cos \beta_1(t) + b_2 \sin \beta_1(t)) + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + a_1 \cos \beta_1(t) - b_1 \sin \beta_1(t) \right)^2 + \left(e^{2\beta_2(t)} (b_2 \cos \beta_1(t) - a_2 \sin \beta_1(t)) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + b_1 \cos \beta_1(t) + a_1 \sin \beta_1(t) \right)^2 \right]^{1/2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ввиду громоздкости уравнения (4.6) аналитическое определение $U_{кр}$ затруднительно.

Однако задача определения $U_{кр}$ существенно упрощается, если приближенно потребовать, чтобы модули обеих слагаемых функции $f(t)$

$$\begin{aligned} |c_1| r^{-1/4} e^{\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t}, \\ |c_2| r^{-1/4} e^{-\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \end{aligned} \quad (4.7)$$

были убывающие. Рассматривая (4.7), легко заметить, что модуль первого слагаемого, независимо от скорости потока, в течение вре-

* Легко проверить, что случаи $k=0$ и $k=1$ дают одинаковые результаты для критической скорости флаттера. Поэтому в дальнейшем принимаем $k=0$.

мени убывает. Тогда критическую скорость флаттера определяем из условия

$$\frac{d}{dt} \left[r^{-1/4} e^{-\beta_2(t) - (\varepsilon + \mu/2)t} \right] \leq 0. \quad (4.8)$$

Имея в виду, что

$$B(t) > 0, \quad \frac{d\beta_2(t)}{dt} = - \frac{\delta}{\sqrt{2E_0}} \sqrt{\sqrt{B^2 + F^2 U^2} - B} < 0, \quad (4.9)$$

из (4.3) и (4.4) находим, что $0 \leq \alpha < \pi/2$ и $\beta_2(t) \leq 0$ ($0 \leq t \leq t_1$).

В силу (4.9) из (4.8) получим

$$\frac{1}{4} \frac{B(t) E_0 a}{B^2 + F^2 U^2} \leq - \frac{1}{\sqrt{24\gamma_0 h (1 - \nu^2)}} \sqrt{\sqrt{B^2 + F^2 U^2} - B} + (\varepsilon + \mu/2). \quad (4.10)$$

Формула (4.10) дает возможность определить критическую скорость флаттера в любой момент времени t ($0 \leq t \leq t_1$).

В большинстве случаев $B^2 \gg F^2 U^2$. Тогда из (4.10) можно получить

$$\frac{U_{kp}}{U_{kp}^*} = 1 - \frac{1}{4(\varepsilon + \mu/2) E_0 - E_1 t} \frac{E_1}{t}, \quad (4.11)$$

где

$$U_{kp}^* = \sqrt{\frac{D(t)}{\delta_0 h} \left(\frac{\pi}{\lambda_x} + \frac{\pi \lambda_x}{\lambda_y^2} \right) \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu} \right)} - \text{критическая скорость, найденная по квазистатической теории с точки зрения температуры, т. е. когда в окончательной формуле критической скорости для несогреваемой пластинки вместо } E \text{ полагать } (E_0 - E_1 t).$$

Формула (4.11) показывает, что динамическая критическая скорость флаттера меньше критической скорости, найденной по квазистатической теории, и в случае достаточно малого затухания может существенно отличаться от нее.

В случае несогреваемой пластинки $E_1 = 0$. Тогда из (4.10) получим

$$U_{kp} = V(\lambda_x, \lambda_y) \left(1 + \frac{2\varepsilon}{\mu} \right), \quad (4.12)$$

где

$$V(\lambda_x, \lambda_y) = \sqrt{\frac{D_0}{\delta_0 h} \left(\frac{\pi}{\lambda_x} + \frac{\pi \lambda_x}{\lambda_y^2} \right)} - \text{фазовая скорость распространения упругих волн в пластинке, } D_0 = D(0).$$

Формула (4.12) совпадает с точной формулой, полученной в работе (5).

Аналогичным образом можно решить задачу в тех случаях, когда $E(t)$ определяется формулами (3.6) или (3.7).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ջերմային դաժարի ազդեցության առկա գոնվող սալի փառները

Դիտարկվում է առկա ժամանակահատվածում սալի կայունության խնդիրը ձախից մեծ արագությամբ
առկա սեղմելի դադարի շրջանակում, երբ սալը գտնվում է ժամանակի ընթացքում փոփոխ-
վող ջերմային զաշտի ազդեցության տակ:

Ընդունվում է, որ սալի նյութի առաձգական հատկությունները կախված են ջեր-
մային զաշտից:

Հոսանքի կրիտիկական արագության համար ստացված է հաշվային բանաձև:

Ցույց է տրված, որ ստացված կրիտիկական արագությունը փոքր է ջերմաստիճանի
իմաստով րվազիստատիկական կրիտիկական արագությունից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948
- ² В. Новацкий, Вопросы термоупругости, Известия АН СССР, 1962.
- ³ А. А. Ильюшин, ПММ, 20, № 6, 1956.
- ⁴ С. А. Амбарцумян, Известия АН СССР, ОТН, № 4, 1963
- ⁵ В. В. Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, М., 1961.
- ⁶ С. А. Амбарцумян, Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, 1961.
- ⁷ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, 1953.
- ⁸ Б. Е. Гейтвуд, Температурные напряжения, ИЛ, 1959.
- ⁹ И. И. Гольденблат, Н. А. Николаенко, Расчет температурных напряжений в ядерных реакторах, Гостехиздат, 1962.