ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXIX 1964 3

МАТЕМАТИКА

Ж. Н. Кешишян

О некоторых вопросах, связанных с сходящимися последовательностями многочленов

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/III 1964)

Рассмотрим последовательность многочленов $P_n(z)$ $(n \geqslant 1)$, которая сходится в каждой точке единичного круга $|z| < 1$.

Определение. Точка z единичного круга называется **регулярной** для последовательности многочленов $P_n(z)$, если существует такая ее окрестность, где последовательность $\{P_n(z)\}$ сходится равномерно. В противном случае точка z единичного круга называется **иррегулярной**.

Монтелем была поставлена задача о характеристике множества иррегулярных точек последовательности многочленов. Эта задача полностью была решена М. А. Лаврентьевым. Им доказана следующая теорема [1, 2].

Теорема М. А. Лаврентьева. *Для того, чтобы множество E единичного круга было множеством иррегулярных точек некоторой последовательности многочленов, необходимо и достаточно, чтобы оно имело следующие свойства:*

1) множество E совершенно относительно единичного круга;

2) множество E является континуумом вместе с единичной окружностью;

3) множество E нигде не плотно;

4) множество E имеет свойство M, т. е. любое замкнутое подмножество F множества E имеет порцию F_1, которая является границей некоторой области D, содержащей бесконечно удаленную точку, и каждая точка множества E принадлежит либо множеству F_1, либо области D.

Если точка z_0 $(|z_0| < 1)$ является регулярной для последовательности многочленов $P_n(z)$, то существует такая ее окрестность, где последовательность $\{P_n(z)\}$ равномерно ограничена. Наоборот, если последовательность многочленов $P_n(z)$ равномерно ограничена в некоторой окрестности точки z_0 $(|z_0| < 1)$, то из теоремы Витали следует, что точка z_0 является регулярной для $\{P_n(z)\}$. Отсюда следует, что последовательность многочленов $P_n(z)$ не может быть равномерно ограниченной ни в какой окрестности иррегулярной точки z_0. Следовательно, для каждого числа n существуют точка z_n, $|z_n| < 1$, $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ и многочлен $P_{m_n}(z)$ такие, что $|P_{m_n}(z_n)| \geqslant n$. Таким образом, если обозначить

$$m(z) = \sup_n |P_n(z)|,$$

то для каждой иррегулярной точки z_0

$$\overline{\lim_{z \to z_0}} m(z) = \infty.$$

С. Н. Мергеляном была поставлена задача о нахождении скорости стремления к бесконечности функции $m(z)$ при $d(z) \to 0$, где $d(z)$ — расстояние точки z ($|z| < 1$) до множества иррегулярных точек последовательности $\{P_n(z)\}$.

Рассмотрим следующую задачу, которая тесно связана с поставленной выше задачей. Пусть $M(t)$ — положительная монотонная функция действительного переменного t, определенная при $0 < t \leqslant 1$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{t \to 0} M(t) = \infty.$$

Обозначим через H класс голоморфных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, которые удовлетворяют условию

$$|f(z)| \leqslant M[d(z)], \quad |z| < 1,$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до множества E, принадлежащего единичному кругу и имеющего свойства 1) и 2) теоремы М. А. Лаврентьева. Поставим следующую задачу: каким условиям должна удовлетворять функция $M(t)$, чтобы класс H был равномерно ограниченным внутри единичного круга, т. е. класс H был нормальным семейством в единичном круге.

В настоящей заметке проводятся некоторые результаты относительно двух сформулированных выше задач.

1. Обозначим через $r = r(\varphi)$ функцию, определенную на бесконечном интервале $1 < \varphi_0 \leqslant \varphi < \infty$ и имеющую следующие свойства: 1) $0 < r(\varphi) < 1$, 2) $r(\varphi_1) \neq r(\varphi_2)$, если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, 3) $\lim_{\varphi \to \infty} r(\varphi) = 1$, 4) $r'(\varphi)$ существует и является абсолютно непрерывной функцией, 5) функция $\rho(\varphi) = r(\varphi + 2\pi) - r(\varphi)$ монотонна. Обозначим через $\varphi(t)$ обратную функцию к функции $\frac{1}{2}\rho(\varphi)$. Тогда имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы класс голоморфных в единичном круге $|z| < 1$ функций $f(z)$, которые удовлетворяют условию*

$$|f(z)| \leqslant M[d(z)], \quad |z| < 1$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до кривой L, уравнением которой в полярных координатах является $r = r(\varphi)$, был равномерно ог-

раниченным внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\varphi(t)}\log\log M(t)=0.$$

Теорема 2. *Для того, чтобы существовала сходящаяся в каждой точке единичного круга последовательность многочленов $P_n(z)$, множество иррегулярных точек которой совпадает с кривой L и для которой $m(z)\leqslant M[d(z)]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\varphi(t)}\log\log M(t)\neq 0.$$

Теорема 3. *Каково бы ни было принадлежащее единичному кругу $|z|<1$ множество E, которое удовлетворяет условиям теоремы М. А. Лаврентьева, существует сходящаяся в каждой точке единичного круга последовательность многочленов $P_n(z)$, множество иррегулярных точек которой совпадает с E и для которой*

$$m(z)\leqslant\exp\left\{\exp\frac{C}{[d(z)]^2}\right\}, \qquad (*)$$

где C — некоторое абсолютное постоянное.

Условие (*) для функции $M(t)$ существенно улучшить нельзя. Существуют принадлежащие единичному кругу множества E, которые удовлетворяют условиям теоремы М. А. Лаврентьева, такие, что класс H является равномерно ограниченным внутри единичного круга, если

$$M(t)=\exp\left[\exp\frac{C}{t^{2-\varepsilon}}\right],$$

где $\varepsilon>0$ произвольное, а C — положительное постоянное (см. [3]).

Теорема 3 дает достаточное условие на функцию $M(t)$. Это достаточное условие, однако, вообще не является необходимым. В самом деле, доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Существует сходящаяся в каждой точке единичного круга $|z|<1$ последовательность многочленов $P_n(z)$, множество иррегулярных точек которой совпадает с диаметром $y=0$ круга $|z|<1$ и для которой*

$$m(z)\leqslant\exp\left[\exp\frac{C}{d(t)}\right],$$

где C — некоторое абсолютное постоянное.

2. Введем следующее определение.

Определение. Точка z называется *точкой равномерной ограниченности* для последовательности аналитических функций $f_n(z)$, если существует такая ее окрестность, где последовательность $|f_n(z)|$ ограничена равномерно. В противном случае точка z называется *точкой неравномерной ограниченности.*

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. *Каково бы ни было принадлежащее единичному кругу множество E, которое удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы М. А. Лаврентьева, существует последовательность многочленов $P_n(z)$, множество неравномерно ограниченных точек которой совпадает с E, для которой справедливо неравенство (*).*

Теорема 6. *Каково бы ни было принадлежащее единичному кругу множество E, которое удовлетворяет условиям теоремы М. А. Лаврентьева, существует последовательность многочленов $P_n(z)$, множество неравномерно ограниченных точек которой совпадает с E, для которой функция $m(z)$ имеет конечное значение в каждой точке единичного круга и удовлетворяет неравенству (*).*

В теоремах 5 и 6 условие (*) существенно улучшить нельзя. Теорема 6 является следствием теоремы 3.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность своему руководителю профессору С. Н. Мергеляну за постановку задач и оказанную помощь при выполнении настоящей работы.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ժ. Ն. ՔԵՇԻՇՅԱՆ

Բազմանդամների զուգամետ հաջորդականությունների հետ կապված մի քանի հարցերի մասին

Դիտարկվում են միավոր շրջանի յուրաքանչյուր կետում զուգամետ $P_n(z)$ բազմանդամների հաջորդականություններ։ Այդպիսի հաջորդականությունների համար Մոնտելի կողմից մտցված է ռեգուլյար ու իռեգուլյար կետերի հասկացողությունները։ Ներկա հոդվածում ստացված են իռեգուլյար կետերի շրջակայքում

$$m(z) = \sup_n |P_n(z)|$$

ֆունկցիայի՝ դեպի անվերջ ձգտելու արագության վերաբերյալ մի շարք ճշգրիտ գնահատականներ։

Այնուհետև միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիաների հաջորդականությունների համար մտցվում է հավասարաչափ ու ոչ հավասարաչափ սահմանափակության կետերի հասկացողությունները և բերվում են ճշգրիտ գնահատականներ ոչ հավասարաչափ կետերի շրջակայքում $m(z)$ ֆունկցիայի՝ դեպի անվերջ ձգտելու արագությունների վերաբերյալ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. А. Лаврентьев,* Sur les fonctions d'une variable complexe représentable par des séries de polynômes, Actual. Sci. et Industr., № 441 (1936), 1—62, Paris. [2] *С. Н. Мергелян,* ДАН СССР, т. 138, № 2 (1961), 285—288. [3] *Ж. Е. Кешишян,* „Известия АН АрмССР", т. XV, № 2 (1962).