

МАТЕМАТИКА

Ю. К. Герасимов

О теореме Фрагмена—Линделефа для функций
обобщенной неположительной кривизны

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/II 1964)

С. Н. Бернштейну ⁽¹⁾ принадлежит доказательство одной геометрической теоремы для функции двух переменных, рассматриваемой во всей плоскости. В статье ⁽²⁾ Г. М. Адельсон-Вельский вводит понятие обобщенной неположительной кривизны и показывает, что теорема С. Н. Бернштейна остается справедливой при меньших ограничениях на рассматриваемую функцию. В настоящей заметке рассматривается вопрос о поведении функции обобщенной неположительной кривизны в полуплоскости. Показывается, что аналогичный факт не верен в пространстве большего числа измерений.

1. Определение. Поверхность G , заданная уравнением $w = f(x, y)$, имеет обобщенную неположительную кривизну, если для любой плоскости γ открытые множества G^+ -точек плоскости γ , лежащих выше поверхности G , и G^- -точек плоскости γ , лежащих ниже поверхности G , не имеет ограниченных связных компонент.

Мы говорим, что функция $f(x, y)$ растет медленнее любой линейной функции, если

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Теорема 1. Если функция $f(x, y)$ непрерывная, обобщенной неположительной кривизны и $f(x, 0) \leq 0$, тогда в полуплоскости $y \geq 0$ имеет место один из трех возможных случаев:

- 1) $f(x, y) \leq 0$,
- 2) $f(x, y)$ растет не медленнее, чем линейная функция,
- 3) $f(x, y)$ цилиндрическая с образующей, параллельной оси ox при значениях $y \geq Y$, где $Y \geq 0$ —конечное число.

Доказательство. Предположим, что не выполняются случай 1) или случай 2), тогда докажем, что будет иметь место случай 3). Итак, пусть функция $f(x, y)$ растет медленнее линейной и имеется точка (x_0, y_0) такая, что $f(x_0, y_0) > 0$. Построим плоскость

$$\psi = \frac{f(x_0, y_0)}{2y_0} y.$$

Рассмотрим связное замкнутое множество $S: [f(x, y) - \psi(y) \geq 0, (x_0, y_0) \in S]$ на плоскости $y \geq 0$. Такое множество найдется и из определения обобщенной неположительной кривизны следует, что оно будет неограниченным при $x \rightarrow +\infty$, либо при $x \rightarrow -\infty$. Пусть для определенности это множество неограничено при $x \rightarrow +\infty$ и ограничено при $x \rightarrow -\infty$. Доказательство аналогично, если мы предположим, что множество S неограничено при $x \rightarrow -\infty$ и ограничено при $x \rightarrow +\infty$. Доказательство несущественно изменится, если предположить, что множество S неограничено как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$. Рассмотрим функцию $v(x, y) = f(x, y) - \psi(y)$ в S . Пусть x_1 — фиксированное число и $x_1 \geq x_0$. Функция $v(x, y)$ имеет максимум по y . Рассмотрим теперь функцию $V(x) = \max_y v(x, y)$.

Поскольку функция $f(x, y)$ может расти с увеличением x только медленнее линейной, то и функция $V(x)$ может расти с увеличением x тоже только медленнее линейной. Пусть функция $V(x) = C_1$ при $x = x'$ ($x' \geq x_0$) и пусть $V(x) = C_2$ при $x = x''$, где $x'' > x'$ и $C_2 < C_1$. Тогда плоскость

$$\psi_1 = \frac{f(x_0, y_0)}{2y_0} y + C_2$$

срезает с поверхности $z = f(x, y)$ „шапочку“. Пусть теперь функция $V(x) = C_3$ при $x = x''$, где $C_3 > C_1$. Тогда плоскость

$$\psi_2 = \frac{f(x_0, y_0)}{2y_0} y + \frac{C_3 - C_1}{2(x'' - x')} (x - x') + C_1,$$

срезает с поверхности $z = f(x, y)$ „шапочку“. Это противоречит тому, что поверхность $z = f(x, y)$ обобщенной неположительной кривизны, поэтому функция $V(x) = \text{const}$. Отсюда, в частности, заключаем, что множество S неограничено и при $x \rightarrow -\infty$. Далее покажем, что в тех точках замкнутого множества $S_0 \subset S$, где $v(x, y) = V(x)$, поверхность $z = f(x, y)$ линейчатая с образующей параллельной оси ox , поскольку в противном случае с поверхности $z = f(x, y)$ можно было бы срезать „шапочку“. Действительно, предположим, что поверхность $z = f(x, y)$ не линейчатая в точках множества S_0 . Тогда найдутся такие три точки (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) , принадлежащие границе связной компоненты $s \subset S_0$, не лежащие на одной прямой, и такие, что если отрезок, соединяющий две крайние точки (x_2, y_2) и (x_4, y_4) , обозначить через β и часть границы множества s , которая соединяет точки (x_2, y_2) , (x_4, y_4) и проходит через точку (x_3, y_3) , обозначить через Γ , то множество $\beta \cap \Gamma$ состоит только из двух точек (x_2, y_2) и (x_4, y_4) . Точки (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) удовлетворяют еще следующему условию: точки множества s , не принадлежащие Γ , и такие, что их можно соединить непрерывной кривой с одной из внутренних точек

непрерывной кривой Γ , не пересекая отрезка β (если таковые имеются). находятся внутри множества ограниченного отрезком β и кривой Γ . Но тогда можно провести плоскость $\delta = \delta(x, y)$, проходящую через точки $(x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ и $(x_4, y_4, f(x_4, y_4))$ и такую, что $f(x_3, y_3) > \delta(x_3, y_3)$. Поворачивая плоскость $\delta = \delta(x, y)$ около прямой, проходящей через точки $(x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ и $(x_4, y_4, f(x_4, y_4))$, мы можем удовлетворить следующему условию: множество $S_1 \subset S_0$, где $f(x, y) - \delta(x, y) > 0$ ограничено, т. е. с поверхности $z = f(x, y)$ срезать „шапочку“. Предположение, что на поверхности $z = f(x, y)$ могут быть прямые линии, не параллельные оси ox , отпадает в силу того, что поверхность $z = f(x, y)$ на бесконечности растет медленнее линейной функции. Итак, мы доказали, что найдется такое $Y = \text{const}$, что $Z = f(x, Y)$ есть прямая на поверхности $z = f(x, y)$, параллельная оси ox . Далее, нетрудно доказать, что вообще при $y \geq Y$ поверхность $z = f(x, y)$ цилиндрическая. Действительно, рассмотрим поверхность $z_1 = f_1(x, y) = f(x, y) - f(x, Y)$ в полуплоскости $y \geq Y$.

Так как $f_1(x, Y) \equiv 0$, то независимо от того, сохраняет знак или меняет знак функция $f_1(x, y)$ при $y \geq Y$, повторяя предыдущие рассуждения, мы докажем, что найдется такое $Y_1 > Y$, что $Z = f(x, Y_1)$ — прямая линия, параллельная оси ox . Рассмотрим полосу $Y \leq y \leq Y_1$. Проведем через параллельные прямые $Z = f(x, Y)$ и $Z = f(x, Y_1)$ плоскость $\alpha = \alpha(x, y)$. Вышеприведенными рассуждениями установим, что на поверхности $\lambda = f(x, y) - \alpha(x, y)$ имеется прямая линия при $y = Y_0$, где $Y < Y_0 < Y_1$, т. е. найдется прямая линия $Z = f(x, Y_0)$ на поверхности $z = f(x, y)$, где $Y < Y_0 < Y_1$. Повторяя подобные рассуждения, мы можем в любой полосе и любой полуплоскости (границы которых параллельны оси ox) при значениях $y \geq Y$ найти прямую линию на поверхности $z = f(x, y)$. Поэтому мы можем утверждать, что при $y \geq Y$ поверхность цилиндрическая с образующей параллельной оси ox . С другой стороны, поверхность $z = f(x, y)$ при $0 \leq y \leq Y$ может быть устроена таким образом, что не является линейчатой. Следовательно, мы можем только утверждать, что найдется такое Y , что при $y \geq Y$ поверхность $z = f(x, y)$ — цилиндрическая с образующей параллельной оси ox . Теорема 1 доказана.

2. В этом пункте покажем, что теорема 1 не распространяется на случай большого числа измерений. Рассмотрим в полупространстве $z \geq 0$ дифференциальное уравнение в частных производных эллиптического типа:

$$(1 + e^y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + e^{-y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + e^{2(x-e^y)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Функция $u(x, y, z) = \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) e^{-e^{x-e^y}}$ — решение этого уравнения.

$u < 0$ при $z = 0$, $u > 0$ при $z = \frac{\pi}{2}$, $|u| < 1$ в полупространстве $z \geq 0$.

Но функция $u(x, y, z)$ не цилиндрическая, т. е. теорема 1 в пространственном случае неверна.

Автор выражает глубокую признательность Е. М. Ландису за руководство работой.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

ՅՈՒ. Կ. ԳԵՐԱՍԻՄՈՎ

**Ընդհանրացված ոչ-բացասական կորույթուն ունեցող ֆունկցիայի
համար Ֆրազմեն-Լինդելոֆի բեռեմի մասին**

Աշխատանքում ապացուցված է Ֆրազմեն-Լինդելոֆի թեորեմը կիսահարթության մեջ ընդհանրացված ոչ-բացասական կորույթուն ունեցող ֆունկցիայի համար: Ապացույցը պարզում է թեորեմի երկրաչափական իմաստը՝ ցույց է տրված, որ այս թեորեմի իրավացիությունը կապված է ոչ-բացասական կորույթուն ունեցող երկու փոփոխականի ֆունկցիայի գրաֆիկի երկրաչափության հետ: Ցույց է տրված, որ այդ փաստը երեք փոփոխականի դեպքում իրավացի չէ:

ЛИТЕРАТУРА — ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ С. Н. Бернштейн, Об одной геометрической теореме и ее применениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа, УМН, вып. VIII (1941), 75 - 81. ² Г. М. Адельсон-Вельский, ДАН СССР, 49, № 6 (1945).