ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVIII 1964 5

МЕХАНИКА

С. М. Дургарьян

К устойчивости нагруженной нагреваемой гибкой пластинки с начальной погибью

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 8/I 1964)

1. Рассматривается гибкая ортотропная прямоугольная пластинка постоянной толщины h, отнесенная к прямоугольным декартовым координатам x, y, z так, что срединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью $z=0$, а направления координатных осей совпадают с главными направлениями упругости материала пластинки. Считается, что материал пластинки подчиняется обобщенному закону Гука, а его физико-механические свойства являются известными функциями температуры нагрева T. Для простоты изложения принимаем, что температура пластинки, оставаясь постоянной по координатам, изменяется лишь во времени t.

В основу дальнейших выкладок кладутся: гипотеза Кирхгоффа о недеформируемых нормалях ([1]) и предположение об отсутствии деформаций сдвигов в нагреваемом элементарном параллелепипеде, вырезанном из материала пластинки плоскостями упругой симметрии ([2]).

В дальнейшем будем считать, что срединная поверхность пластинки имеет начальную погибь $w_0(x, y)$ и пластинка, оставаясь в упругой стадии, допускает значительные (по сравнению с толщиной) прогибы $w(x, y, t)$ ([3]).

2. В силу принятых предположений и гипотез из обобщенного закона Гука имеем ([4])

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + z(B_{11}\varkappa_1 + B_{12}\varkappa_2) - \beta_1 T,\\
\sigma_y &= B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + z(B_{12}\varkappa_1 + B_{22}\varkappa_2) - \beta_2 T,\\
\tau_{xy} &= B_{66}\omega + 2zB_{66}\tau,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2}, \quad B_{12} = B_{21} = \frac{\nu_1 E_2}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_2 E_1}{1-\nu_1\nu_2},$$

$$B_{66} = G_{12}, \quad \beta_i = B_{1i}\alpha_1 + B_{2i}\alpha_2.$$

Здесь, как обычно, через E_i, G_{ij}, ν_i обозначены модули Юнга, модули сдвига и коэффициенты Пуассона для ортотропного тела, а через α_1 и α_2 обозначены коэффициенты температурного расширения соответственно вдоль координатных линий $y = \text{const}$ и $x = \text{const}$.

Для деформаций срединной плоскости и изменений кривизны имеем ([3])

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial (w_0 + w)}{\partial x}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2, \\
\varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial (w_0 + w)}{\partial y}\right]^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \\
\omega &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial (w_0 + w)}{\partial x}\frac{\partial (w_0 + w)}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}, \\
\varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \varkappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad \tau = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ — тангенциальные перемещения точек срединной плоскости пластинки.

Выпишем уравнения неразрывности и уравнения равновесия по теории Кармана применительно к гибкой пластинке с начальной погибью при действии поперечной нагрузки q ([3])

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} + \\
&+ \left[\frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y}\right]^2 - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}\right)^2,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + T_1\frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} + T_2\frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} + \\
&+ 2S\frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} + q = 0,
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где значения внутренних сил T_1, T_2, S и моментов M_1, M_2, H определяются обычным способом из (2.1)

$$T_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 - C_{1T}, \quad T_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 - C_{2T}, \quad S = C_{66}\omega,$$

$$M_1 = D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2, \quad M_2 = D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2, \quad H = 2D_{66}\tau,$$

откуда для относительних деформаций ε_1, ε_2 и ω получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{C_{22}}{\Omega}(T_1 + C_{1T}) - \frac{C_{12}}{\Omega}(T_2 + C_{2T}), \\
\varepsilon_2 &= \frac{C_{11}}{\Omega}(T_2 + C_{2T}) - \frac{C_{12}}{\Omega}(T_1 + C_{1T}), \\
\omega &= \frac{1}{C_{66}}S.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь, как обычно, приняты обозначения

$$D_{ij}=\frac{B_{ij}h^3}{12},\qquad C_{ij}=B_{ij}h\quad (i,\ j=1,\ 2,\ 6),$$

$$\Omega=C_{11}C_{22}-C_{12}^2,\quad C_{iT}=\beta_i Th\quad (i=1,\ 2).$$

Введя в рассмотрение функцию напряжений φ, известным путем ([1]) решение задачи сведется к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений относительно основных искомых функций w и φ

$$\begin{gathered}D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial y^2}+\\+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x^2}=q,\\ \frac{C_{11}}{\Omega}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+\left(\frac{1}{C_{66}}-2\frac{C_{12}}{\Omega}\right)\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{C_{22}}{\Omega}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+\\+\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial y^2}-\left[\frac{\partial^2(w_0+w)}{\partial x\partial y}\right]^2=\\=\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)^2.\end{gathered}\tag{2.6}$$

3. Рассмотрим цилиндрический изгиб шарнирно опертой удлиненной пластинки с несближающимися кромками. Одну из координатных осей (ось Ox) направим вдоль ее пролета,

Предполагая прогибы малыми по сравнению с пролетом l, тангенциальное усилие T_1 будем считать постоянным по координате x ([3]).

Для этого частного случая из первого уравнения (2.6) получим

$$D_{11}\frac{d^4 w}{dx^4}-T_1\frac{d^2(w_0+w)}{dx^2}=q.\tag{3.1}$$

Условия шарнирного опирания будут удовлетворены, если функцию прогибов w представить в виде

$$w=f\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\tag{3.2}$$

Уравнение начальной срединной поверхности пластинки с погибью примем в виде

$$w_0=f_0\sin\frac{\pi x}{l}\cdot\tag{3.3}$$

Составим уравнение Бубнова—Галеркина для дифференциального уравнения (3.1)

$$\int_0^l\left[D_{11}\frac{d^4 w}{dx^4}-T_1\frac{d^2(w_0+w)}{dx^2}-q\right]\sin\frac{\pi x}{l}dx=0.\tag{3.4}$$

Внеся (3.2), (3.3) в (3.4) и выполнив интегрирование, получим

$$\frac{\pi^2}{l^2} D_{11} f + T_1 (f + f_0) = \frac{2l}{\pi^2} q^\circ, \tag{3.5}$$

где $q^\circ = \int\limits_0^l q \sin \frac{\pi x}{l} dx$, и в частном случае, когда поперечная нагрузка q° не изменяется вдоль пролета, $q^\circ = \frac{2l}{\pi} q$.

Вычислим взаимное сближение Δu кромок $x = 0$ и $x = l$. Из первого выражения (2.2) имеем

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{d(w_0 + w)}{dx} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2,$$

откуда

$$\Delta u = - \int\limits_0^l du = - \int\limits_0^l \left\{ \varepsilon_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{d(w_0 + w)}{dx} \right]^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right\} dx. \tag{3.6}$$

Используя условие $\varepsilon_2 = 0$, из (2.5) получим

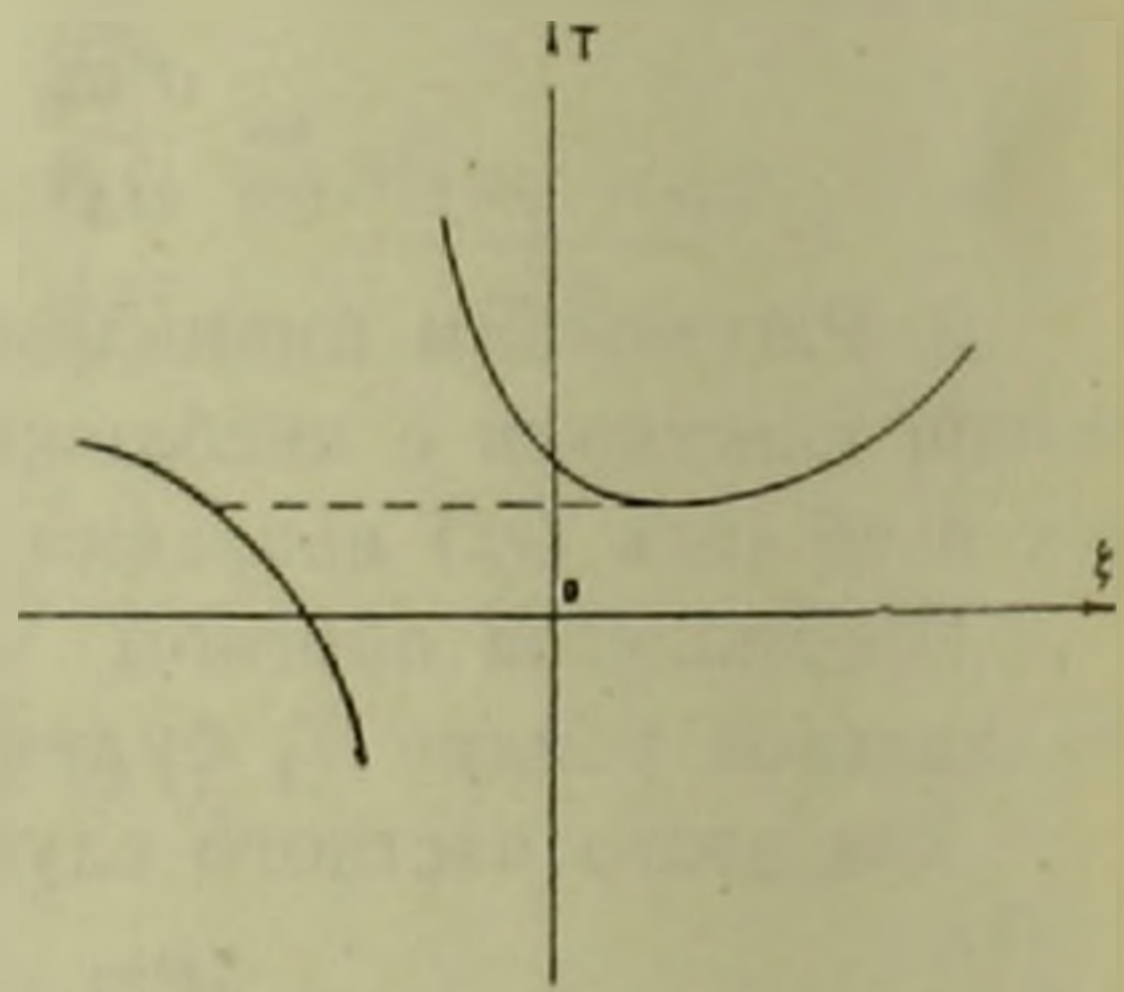
$$\varepsilon_1 = \frac{T_1 + C_{1T}}{C_{11}}. \tag{3.7}$$

Внеся (3.2), (3.3) и (3.7) в (3.6) и выполнив интегрирование, будем иметь

$$\Delta u = - \frac{T_1 + C_{1T}}{C_{11}} l + \frac{\pi^2}{4l} f (f + 2f_0). \tag{3.8}$$

В случае несближающихся кромок $x = 0$ и $x = l$ для T_1 получим

$$T_1 = \frac{\pi^2}{4l^2} C_{11} f (f + 2f_0) - C_{1T},$$



Фиг. 1.

а, следовательно, перейдя к безразмерным прогибам $\zeta = f/h$ и $\zeta_0 = f_0/h$, из (3.5) будем иметь

$$\zeta^3 + 3\zeta_0 \zeta^2 + \left[\frac{1}{3} + 2\zeta_0 - \left(\frac{2l}{\pi h} \right)^2 (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) T \right] \zeta =$$

$$= \left(\frac{2l}{\pi h} \right)^2 \zeta_0 (\alpha_1 + \nu_2 \alpha_2) T + \left(\frac{2l}{\pi h} \right)^3 \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1 h \pi} q^\circ. \tag{3.9}$$

Таким образом, получена связь между прогибом, начальной погибью, температурой и упругими свойствами нагреваемой пластинки.

4. Исследование уравнения (3.9) показывает, что при изменении температуры гибкой пластинки с начальной погибью возможно явление „хлопка“ даже при постоянной нагрузке.

Для иллюстрации сказанного приведем график (фиг. 1) зависимости $\zeta = \zeta(T)$ при некоторых фиксированных значениях ζ_0 и q°.

При вычислениях было принято, что упругие свойства материала пластинки изменяются в зависимости от температуры так, что $\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1} = \frac{1+\lambda T}{E_0}$, где $\lambda = \mathrm{const}$.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Մ. ԴՈՒՐԳԱՐՅԱՆ

Նախնական ճկվածք ունեցող, բեռնավորված, տաքացվող ճկուն սալի կայունության մասին

Դիտարկված է նախնական ճկվածք ունեցող, բեռնավորված ճկուն օրթոտրոպ սալի կայունությունը փոփոխական ջերմային դաշտում։ Ընդունված է, որ սալի նյութի ֆիզիկական հատկությունները փոփոխվում են կախված ջերմաստիճանից։ Ցույց է տրված, որ հաստատուն բեռնվածության դեպքում, ջերմաստիճանի փոփոխման հետևանքով հնարավոր է կայուն հավասարակշռության ձևի թռիչքային փոփոխում („хлопок")։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *С. Г. Лехницкий*, Анизотропные пластинки, Гостехиздат, 1957. [2] *В. Новацкий*, Вопросы термоупругости, Изд. АН СССР, 1962. [3] *А. С. Вольмир*, Гибкие пластинки и оболочки, ГИТТЛ, 1956. [4] *С. А. Амбарцумян*, Известия АН АрмССР (физ.-мат., естеств. и техн. науки), т. V, № 6 (1952).