ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXXVIII 1964 5

МАТЕМАТИКА

М. М. Джрбашян, академик АН Армянской ССР, и А. А. Китбалян

Об одном обобщении полиномов Чебышева

(Представлено 17/III 1964)

В работах [1, 2] было приведено построение систем рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, зависящих от параметра $s\,(0 \leqslant s \leqslant 1)$ и порожденных данным ограниченным континуумом K и произвольной последовательностью комплексных чисел* $\{\omega_k\}_0^\infty \in G^{(-)}$, где $G^{(-)}$ — та из смежных с K областей, которая содержит точку $z=\infty$.

В настоящей заметке в качестве континуума K берется отрезок $[-1, +1]$ и выводятся явные формулы для соответствующих систем рациональных функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в случаях $s=0$ и $s=1$. Устанавливается, что системы $\{M_k^{(0)}(x)\}_0^\infty$ и $\{M_k^{(1)}(x)\}_0^\infty$ ортогональны на отрезке $[-1, +1]$ при наличии соответственно весов $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\sqrt{1-x^2}$ и являются естественными аналогами полиномов Чебышева первого и второго родов.

1°. Нам необходимо вкратце напомнить способ построения систем $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ в общем случае.

Известно, что с произвольной заданной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_k\}_0^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ можно ассоциировать систему рациональных функций Мальмквиста

$$\varphi_0(w) = \frac{(1-|\alpha_0|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\bar{\alpha}_0 w},$$

$$\varphi_n(w) = \frac{(1-|\alpha_n|^2)^{\frac{1}{2}}}{1-\bar{\alpha}_n w} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k - w}{1-\bar{\alpha}_k w}\frac{|\alpha_k|}{\alpha_k} \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{1}$$

ортонормальную на единичной окружности в смысле

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w|=1} \varphi_m(w)\overline{\varphi_n(w)}\,|dw| = \delta_{m,n} = \begin{cases}0, & m \neq n\\ 1, & m=n\end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2\cdots). \tag{2}$$

* В последовательности $\{\omega_k\}_0^\infty$ несобственное число $\omega_k=\infty$ может встречаться с любой кратностью.

Предположим, далее, что функция $w=\Phi(z)$ $(\Phi(\infty)=\infty,$ $\Phi'(\infty)>0)$ конформно отображает область $G^{(-)}$ на внешность единичного круга $|w|>1$, и введем в рассмотрение систему рациональных функций Мальмквиста $\{\varphi_k^{(\omega)}(w)\}_0^\infty$, ассоциированную с последовательностью $\{\alpha_k^{(\omega)}\}_0^\infty$ $(|\alpha_k^{(\omega)}|<1)$, где

$$\alpha_k^{(\omega)}=\begin{cases}\overline{[\Phi(\omega_k)]^{-1}}, & \omega_k\neq\infty\\ 0, & \omega_k=\infty\end{cases}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Заметим, что тогда будем иметь

$$\varphi_0^{(\omega)}[\Phi(z)]=\frac{(|\Phi(\omega_0)|^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(\omega_0)-\Phi(z)}e^{i\arg\Phi(\omega_0)},$$

$$\varphi_n^{(\omega)}[\Phi(z)]=\frac{(|\Phi(\omega_n)|^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(\omega_n)-\Phi(z)}e^{i\arg\Phi(\omega_n)}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1-\overline{\Phi(\omega_k)}\,\Phi(z)}{\Phi(\omega_k)-\Phi(z)}\cdot\frac{|\Phi(\omega_k)|}{\overline{\Phi(\omega_k)}}.$$
$$(n=1,\ 2,\cdots).$$

Функция $\varphi_n^{(\omega)}[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s$ $(0\leqslant s\leqslant 1)$ аналитична всюду в области $G^{(-)}$ за исключением точек $z=\omega_0,\ \omega_1,\cdots\omega_n$, где она имеет полюсы. Обозначим через $M_n^{(s)}(z)$ сумму главных частей вместе с постоянными слагаемыми разложения функции $\varphi_n^{(\omega)}[\Phi(z)][\Phi'(z)]^s$ в окрестностях ее отличных друг от друга особых точек.

Функция $M_n^{(s)}(z)$ является рациональной функцией с полюсами в точках $z=\omega_0,\ \omega_1,\cdots\omega_n$.

Система функций $\{M_n^{(s)}(z)\}_0^\infty$, названная системой рациональных функций, порожденной континуумом K и последовательностью чисел $\{\omega_k\}_0^\infty\in G^{(-)}$, является естественным обобщением полиномов Фабера $\{\Phi_n(z)\}_0^\infty$ в том смысле, что в случае, когда

$$\omega_0=\omega_1=\cdots=\omega_n=\cdots=\infty.$$

имеем

$$\Phi_n(z)=\tau^{-n}M_n^{(0)}(z)\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

где постоянная τ определяется из формулы

$$\tau=\lim_{z\to\infty}z^{-1}\Phi(z).$$

Функции системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ допускают интегральное представление. А именно, если $G^{(+)}$ — дополнительная к $G^{(-)}$ область, а $\Gamma\subset\subset G^{(-)}$ — замкнутый контур, охватывающий континуум K и не содержащий полюсов функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^n$, т. е. точек $\{\omega_k\}_0^n$, то

$$M_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi_k^{(\omega)}[\Phi(\zeta)][\Phi'(\zeta)]^s}{\zeta-z}d\zeta,\quad z\in G^{(+)},\tag{3}$$

где интегрирование по контуру Γ совершается в положительном направлении относительно области $G^{(+)}$.

2°. Приступим теперь к построению системы функций $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$, порожденной континуумом $K=[-1, +1]$ и произвольной последовательностью комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$, лежащих вне этого отрезка.

Заметим, что функция

$$w=\Phi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$$

конформно отображает внешнюю часть отрезка $K=[-1, +1]$ на внешность единичного круга $|w|>1$, причем

$$\Phi(\infty)=\infty, \quad \Phi'(\infty)=\tau=2.$$

Образуем теперь последовательность чисел $\{\alpha_k^{(\omega)}\}_0^\infty$ $(|\alpha_k^{(\omega)}|<1)$ по формулам

$$\alpha_k^{(\omega)}=\begin{cases}\left[\omega_k+\sqrt{\omega_k^2-1}\right]^{-1} & \text{при} \quad \omega_k\neq\infty \\ 0 & \text{при} \quad \omega_k=\infty\end{cases} \qquad (k=0, 1, 2,\cdots) \tag{4}$$

и составим ассоциированную с ней систему рациональных функций Мальмквиста $\{\varphi_n^{(\omega)}(w)\}_0^\infty$.

Обозначим через Γ_ρ $(\rho>1)$ эллипс

$$\Gamma_\rho: |z+\sqrt{z^2-1}|=\rho$$

с фокусами в точках ± 1, пробегаемый в положительном направлении. Тогда, выбирая числа $\rho_n>1$ настолько близко к единице, чтобы точки $\{\omega_k\}_0^n$ лежали вне замкнутого эллипса Γ_{ρ_n}, в рассматриваемом случае для функций системы $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^n$ получим следующее представление

$$M_k^{(s)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\rho_n}}\frac{\varphi_k^{(\omega)}(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}{\zeta-z}\left(1+\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\right)^s d\zeta, \tag{5}$$

$$z\in G_{\rho_n}^{(+)} \quad (k=0, 1,\cdots n),$$

где $G_{\rho_n}^{(+)}$ — внутренняя часть эллипса Γ_{ρ_n}.

Вычислим интеграл (5) в двух случаях: при $s=0$ и $s=1$. С этой целью в интеграле (5) совершим замену переменной $\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}=t$, $\zeta=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, в результате чего функции $M_k^{(0)}(x)$ и $M_k^{(1)}(x)$ при $x\in[-1, +1]$ запишутся в виде

$$M_k^{(0)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho_n}\frac{\varphi_k^{(\omega)}(t)}{t^2-2tx+1}\,\frac{t^2-1}{t}\,dt, \tag{6}$$

$$M_k^{(1)}(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=\rho_n}\frac{t\varphi_k^{(\omega)}(t)}{t^2-2tx+1}\,dt, \tag{7}$$

причем подынтегральная функция формулы (6) в круге $|t| < \rho_n$ имеет простые полюсы в точках

$$t = 0, \quad x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ и } x - \sqrt{x^2 - 1},$$

а полюсы подынтегральной функции формулы (7) находятся лишь в точках

$$t = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ и } x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Поэтому, применяя теорему о вычетах, получим

$$M_k^{(1)}(x) = \varphi_k^{(\omega)}(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \varphi_k^{(\omega)}(x - \sqrt{x^2 - 1}) - \varphi_k^{(\omega)}(0), \tag{8}$$

$$M_k^{(1)}(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})\,\varphi_k^{(\omega)}(x + \sqrt{x^2 - 1}) - (x - \sqrt{x^2 - 1})\,\varphi_k^{(\omega)}(x - \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 - 1}}. \tag{9}$$

При специальном выборе последовательности комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$ функции $\frac{1}{2} M_k^{(0)}(x)$ и $\frac{1}{2} M_k^{(1)}(x)$ переходят соответственно в классические полиномы Чебышева [3] первого и второго родов $T_k(x)$ и $U_k(x)$, определяемые по формулам

$$T_k(x) = \cos k \arccos x = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k],$$

$$U_k(x) = \frac{\sin (k + 1) \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{k+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{k+1}}{2i\sqrt{1 - x^2}} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

В самом деле, если положить

$$\omega_0 = \omega_1 = \cdots = \omega_n = \cdots = \infty,$$

то будем иметь

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \cdots = 0,$$

а поэтому

$$\varphi_k^{(\omega)}(z) = z^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

и

$$\varphi_k^{(\omega)}(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае

$$M_0^{(0)}(x) \equiv 1, \quad M_k^{(5)}(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

то есть

$$M_k^{(0)}(x) = 2T_k(x) \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

а

$$M_k^{(1)}(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{k+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{k+1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = 2U_k(x) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

3°. Докажем, наконец, следующую теорему.

Теорема. *Для произвольной последовательности комплексных чисел $\{\omega_k\}_0^\infty$ справедливы следующие утверждения:*

а) *если $\omega_0 = \infty$, то система функций $\{M_n^{(0)}(x)\}_0^\infty$, где*

$$M_k^{(0)}(x) \equiv 1, \quad M_n^{(0)}(x) = \varphi_n^{(\omega)}(x + \sqrt{x^2-1}) + \varphi_n^{(\omega)}(x - \sqrt{x^2-1}) \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{10}$$

ортогональна на отрезке $[-1, +1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ в смысле

$$\int_{-1}^{1} \frac{M_m^{(0)}(x)\overline{M_n^{(0)}(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots) \\ 2\pi & \text{при} \quad m = n \quad (m, n = 1, 2, \cdots) \\ \pi & \text{при} \quad m = n = 0; \end{cases} \tag{11}$$

б) *система функций $\{M_n^{(1)}(x)\}_0^\infty$, где функции $M_n^{(1)}(x)$ определяются по формуле (9), ортогональна на отрезке $[-1, +1]$ с весом $\sqrt{1-x^2}$ в смысле*

$$\int_{-1}^{1} M_m^{(1)}(x)\overline{M_n^{(1)}(x)}\sqrt{1-x^2}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n \\ 2\pi & \text{при} \quad m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{12}$$

Доказательство. а) Прежде всего заметим, что в случае $\omega_0 = \infty$ будет также $\alpha_0 = 0$, поэтому формула (10) непосредственно следует из формулы (8), если учесть, что из определения (1) системы рациональных функций Мальмквиста при $\alpha_0 = 0$ имеем

$$\varphi_0^{(\omega)}(0) = 1, \quad \varphi_k^{(\omega)}(0) \equiv 0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Перейдем теперь к доказательству формулы (11). С этой целью составим интеграл

$$I_{m,n} = \int_{-1}^{1} \frac{M_m^{(0)}(x)\overline{M_n^{(0)}(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx \qquad (m, n = 0, 1, 2 \cdots)$$

и подставим в него значения функций $M_m^{(0)}(x)$ и $\overline{M_n^{(0)}(x)}$ из формулы (6).

Тогда, если переменить порядок интегрирования, получим

$$I_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|t_1| = \rho_m} \varphi_m^{(\omega)}(t_1) \frac{t_1^2 - 1}{t_1} dt_1 \int_{|t_2| = \rho_n} \overline{\varphi}_n^{(\omega)}(t_2) \frac{t_2^2 - 1}{t_2} dt_2 \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{(t_1^2 - 2t_1 x + 1)(t_2^2 - 2t_2 x + 1)}. \tag{13}$$

Если воспользоваться значением интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \qquad (|a|>1),$$

то нетрудно убедиться в том, что

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx}{(t_1^2-2t_1x+1)(t_2^2-2t_2x+1)} = \frac{\pi(t_1t_2+1)}{(t_1t_2-1)(t_1^2-1)(t_2^2-1)}.$$

Подставляя значение интеграла I_1 в формулу (13), получим

$$I_{m,n} = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{|t_1|=\rho_m} \varphi_m^{(\omega)}(t_1) \frac{dt_1}{t_1} \int\limits_{|t_2|=\rho_n} \bar{\varphi}_n^{(m)}(t_2) \frac{t_1t_2+1}{t_1t_2-1} \frac{dt_2}{t_2}. \tag{14}$$

Вычислим отдельно интеграл

$$I_n = \int\limits_{|t_1|=\rho_n} \bar{\varphi}_n^{(\omega)}(t_2) \frac{t_1t_2+1}{t_1t_2-1} \frac{dt_2}{t_2}.$$

Замечая, что подынтегральная функция интеграла I_n имеет полюсы в точках $t_2=0$ и $\frac{1}{t_1}$, лежащие в круге $|t_2| \leqslant \rho_n$, получим

$$I_n = 4\pi i \bar{\varphi}_n^{(\omega)}\left(\frac{1}{t_1}\right) \quad (n \geqslant 1),$$

если учесть, что $\varphi_n^{(\omega)}(0)=0$ $(n \geqslant 1)$.

Подставляя значение интеграла I_n в формулу (14), будем иметь

$$I_{m,n} = -i \int\limits_{|t_1|=\rho_m} \varphi_m^{(\omega)}(t_1) \bar{\varphi}_n^{(\omega)}\left(\frac{1}{t_1}\right) \frac{dt_1}{t_1}. \tag{15}$$

Перейдем к пределу в обеих частях формулы (15) при $\rho_m \to 1$. Тогда получим

$$I_{m,n} = -i \int\limits_{|t_1|=1} \varphi_m^{(\omega)}(t_1) \overline{\varphi_n^{(\omega)}(t_1)} \frac{dt_1}{t_1} = \int\limits_{|t_1|=1} \varphi_m^{(\omega)}(t_1) \overline{\varphi_n^{(\omega)}(t_1)} \, |dt_1|,$$

откуда, в силу соотношения (2), получим утверждение теоремы (11) при $m=0, 1, 2, \cdots$, $n=1, 2, \cdots$.

В случае же $m=n=0$ непосредственно убеждаемся, что

$$I_{0,0} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

б) Для доказательства утверждения (12) теоремы составим интеграл

$$I^{(1)}_{m,n}=\int\limits_{-1}^{1} M^{(1)}_m(x)\,\overline{M^{(1)}_n(x)}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

и подставим в него значения функций $M^{(1)}_m(x)$ и $\overline{M^{(1)}_n(x)}$ из формулы (7).

Тогда, переменив порядок интегрирования, получим

$$I^{(1)}_{m,n}=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{|t_1|=\rho_m} t_1\varphi^{(\omega)}_m(t_1)\,dt_1\int\limits_{|t_2|=\rho_n} t_2\bar{\varphi}^{(\omega)}_n(t_2)\,dt_2\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{(t_1^2-2t_1x+1)(t_2^2-2t_2x+1)}. \qquad (16)$$

Если теперь воспользоваться формулой

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{a-x}\,dx=\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\qquad (|a|>1),$$

то будем иметь

$$I_2\equiv\int\limits_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{(t_1^2-2t_1x+1)(t_2^2-2t_2x+1)}=\frac{\pi}{2t_1t_2(t_1t_2-1)}.$$

Подставляя значение интеграла I_2 в формулу (16), получим

$$I^{(1)}_{m,n}=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t_1|=\rho_m}\varphi^{(\omega)}_m(t_1)\,dt_1\int\limits_{|t_2|=\rho_n}\bar{\varphi}^{(\omega)}_n(t_2)\,\frac{dt_2}{t_1t_2-1}.$$

Для вычисления интеграла

$$I^{(1)}_n=\int\limits_{|t_2|=\rho_n}\bar{\varphi}^{(\omega)}_n(t_2)\,\frac{dt_2}{t_1t_2-1} \qquad (17)$$

достаточно найти вычет подынтегральной функции относительно полюса $t_2=\dfrac{1}{t_1}$.

В итоге получим

$$I^{(1)}_n=2\pi i\,\frac{\bar{\varphi}^{(\omega)}_n\left(\dfrac{1}{t_1}\right)}{t_1},$$

откуда, с учетом формулы (17), находим

$$I^{(1)}_{m,n}=-i\int\limits_{|t_1|=\rho_m}\varphi^{(\omega)}_m(t_1)\,\bar{\varphi}^{(\omega)}_n\left(\frac{1}{t_1}\right)\frac{dt_1}{t_1}. \qquad (18)$$

Переходя, наконец, к пределу в формуле (18) при $\rho_m \to 1$ и пользуясь соотношением (2), будем иметь

$$I_{m,n}^{(1)} = \int\limits_{|t_1|=1} \varphi_m^{(\omega)}(t_1)\, \overline{\varphi_m^{(\omega)}(t_1)}\, |dt_1| = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ ԵՎ Ա. Ա. ԿԻՏԲԱԼՅԱՆ

Չեբիշևի բազմանդամների մի ընդհանրացման մասին

Նախորդ աշխատանքներում (1, 2) *բերված էր տված սահմանափակ* K *կոնտինուումով և* $\{\omega_k\}_0^\infty$ *կոմպլեքս թվերի կամայական հաջորդականությունով առաջացած* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ $(0 < s < 1)$ *ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմի կառուցման եղանակը։*

Ներկա աշխատանքում K *կոնտինուումի փոխարեն վերցված է* $[-1, +1]$ *հատվածը և դուրս են բերվում* $\{M_k^{(s)}(z)\}_0^\infty$ *ռացիոնալ ֆունկցիաների սիստեմների համար բացահայտ բանաձևեր* $s=0$ *և* $s=1$ *դեպքերում։*

Ապացուցվում է թեորեմ $\{M_k^{(0)}(x)\}_0^\infty$ *և* $\{M_k^{(1)}(x)\}_0^\infty$ *սիստեմների օրթոգոնալության մասին համապատասխանաբար* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *և* $\sqrt{1-x^2}$ *կշիռներով* $[-1, +1]$ *հատվածում։ Ցույց է տրվում, որ* $\{M_k^{(0)}(x)\}_0^\infty$ *և* $\{M_k^{(1)}(x)\}_0^\infty$ *սիստեմները հանդիսանում են Չեբիշևի 1 և 2 սեռի բազմանդամների բնական ընդհանրացումները։*

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Известия АН АрмССР (серия физ.-мат. наук). 10, № 1, 21, (1957). [2] *М. М. Джрбашян*, ДАН СССР, 143, № 1 (1962). [3] *В. Л. Гончаров*, Теория интерполирования и приближения функций, М., 1954.