ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

XXXVIII 1964 5

МАТЕМАТИКА

И. Е. Овчаренко

О продолжении эрмитово-положительных функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 27/I 1964)

Как известно ([1–3]), эрмитово-положительная (э. п.) функция $F(x; y)$, заданная в полосе $-\infty < x < \infty$, $-2a \leqslant y \leqslant 2a$, всегда допускает продолжение на плоскость с сохранением эрмитовой положительности. Однако вопрос об описании всех таких продолжений остается открытым. В настоящей заметке дается полное решение этого вопроса для одного класса э.-п. функций, приводятся также необходимые и достаточные условия неединственности продолжения.

Мы полагаем, что в общем случае описание продолжений получается надлежащей модификацией излагаемых ниже рассуждений.

1. Пусть $F(x; y)$ $(-\infty < x < \infty, -2a \leqslant y \leqslant 2a)$ непрерывная э.-п. функция. Рассмотрим обобщенные функции вида $f(x) = \dfrac{d\omega_f(x)}{dx}$, $\omega_f(x)$ — финитные функции ограниченной вариации. На этом множестве определим квазискалярное произведение, полагая ([4,5])

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x' - x''; 0)\, d\omega_f(x')\, d\,\overline{\omega_g(x'')},$$

и оператор $i\dfrac{d}{dx}$.

Отождествляя элементы, для которых $(f, f) = 0$, и производя пополнение, получим гильбертово пространство H. Оператор $i\dfrac{d}{dx}$ естественным образом порождает в H самосопряженный оператор A. Определим форму $(f, g)_y$, полагая

$$(f, g)_y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x' - x''; y)\, d\omega_f(x')\, d\overline{\omega_g(x'')}. \qquad (1)$$

Неравенство $|(f, g)_y|^2 \leqslant (f, f)\,(g, g)$ показывает, что форма $(f, g)_y$ может быть представлена в виде $(f, g)_y = (B_y f, g)$, причем

$$\|B_y\| \leqslant 1, \quad -2a \leqslant y \leqslant 2a.$$

Непосредственно убеждаемся, что при любых $f, g \in D(A)$ выполняется равенство

$$(B_y f, Ag) = (Af, B_y^* g). \tag{2}$$

Из (2) следует, что при любых $f, g \in \mathbf{H}$, $(B_y f, g) = (B_y U_\lambda f, U_\lambda g)$, U_λ — преобразование Кэли оператора A, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Откуда $U_\lambda B_y = B_y U_\lambda$. Последнее эквивалентно перестановочности B_y и спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ оператора A. Из перестановочности B_y и $\{E_\lambda\}$ и простоты спектра A вытекает представление

$$B_y = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda; y)\, dE_\lambda, \quad -2a \leqslant y \leqslant 2a. \tag{3}$$

Так как $F(x; y)$ непрерывная э.-п. функция, то $\{B_y\}$ непрерывная положительно определенная оператор-функция. Положительная определенность оператор-функции $\{B_y\}$ понимается в том смысле, что при любых векторах $x_j \in H$ и любых $y_j \in (-a, a)$, $j = 1, 2, \cdots n$, выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{n} (B_{y_j - y_k} x_j, x_k) \geqslant 0.$$

От функции $F(x; y)$ потребуем, чтобы неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ в представлении

$$F(x; 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\sigma(\lambda)$$

была функцией чистых скачков, или, что одно и то же, $F(x; 0)$ почти периодическая. Такие функции будем называть функциями класса D. Пусть λ_k точки скачков функции $\sigma(\lambda)$. Функции $\varphi(\lambda_k; y)$, фигурирующие в представлении (3) будем называть *каналовыми* функциями э.-п. функции $F(x; y)$. Непосредственная проверка показывает, что каждая из функций $\varphi(\lambda_k; y)$ э.-п. и непрерывна. Пусть $\bar{\varphi}(\lambda_k; y)$ э.-п. функция, являющаяся продолжением функции $\varphi(\lambda_k; y)$.

Построим оператор-функцию $\bar{B}_y$, полагая

$$\bar{B}_y = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\lambda_k; y)\, dE_\lambda, \quad -\infty < y < \infty.$$

Функцию $\bar{F}(x; y)$ $(-\infty < x, y < \infty)$ определим равенством

$$\bar{F}(x; y) = (\bar{B}_y \delta(t - x), \quad \delta(x)) \tag{4}$$

или, что то же, $\bar{F}(x; y)$ допускает представление

$$\bar{F}(x; y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, \bar{\varphi}(\lambda; y)\, d\sigma(\lambda). \tag{5}$$

Учитывая, что $\bar{B}_y$ продолжение оператор-функции B_y, и равенство (4), мы получаем, что $\bar{F}(x; y)$ продолжение э.-п. функции $F(x; y)$.

Покажем, что $\bar{F}(x; y)$ э.-п. функция. Для этого достаточно показать, что $\bar{B}_y$ положительно определенная оператор-функция. Пусть $x_j (j=1, 2, \cdots n)$ произвольные векторы из H, y_j любые действительные числа. Векторы x_j представим следующим образом:

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} x_j(\lambda)\, dE_\lambda u, \quad u = \delta(x), \quad j = 1, 2, \cdots n.$$

Далее имеем:

$$\sum_{j,k=1}^{n} (\bar{B}_{y_j - y_k} x_j, x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\lambda; y_j - y_k)\, d(E_\lambda x_j, x_k) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\lambda; y_j - y_k) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} x_j(\mu)\, dE_\mu u, x_k \right) =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\lambda; y_j - y_k)\, x_j(\lambda)\, d\overline{(E_\lambda x_k, u)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j,k=1}^{n} \bar{\varphi}(\lambda; y_j - y_k)\, x_j(\lambda)\overline{x_k(\lambda)} \right) d\sigma(\lambda) \geqslant 0, \quad \sigma(\lambda) = (E_\lambda u, u).$$

Ясно, что все э.-п. продолжения функции $\bar{F}(x; y)$ задаются равенством (5) при соответствующем выборе э.-п. продолжений каналовых функций.

Теорема 1. *Пусть $F(x; y)$ непрерывная э.-п. функция класса D, заданная при $-\infty < x < \infty$, $-2a \leqslant y \leqslant 2a$,*

$$F(x; 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k e^{i\lambda_k x},$$

$\varphi(\lambda_k; y)$ каналовые функции, а $\sigma(\lambda_k; \mu)$ меры, задающие представление

$$\varphi(\lambda_k; y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\sigma(\lambda_k; \mu).$$

Тогда функция

$$\bar{F}(x; y) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \rho_k e^{i\lambda_k x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\sigma(\lambda_k; \mu)$$

является э.-п. продолжением функции $F(x; y)$.

Обратно, любая э.-п. функция, являющаяся продолжением $F(x; y)$ *может быть определена равенством* (*) *при соответствующем выборе мер* $\sigma(\lambda_k; \mu)$.

Теорема 2. *Для того, чтобы э.-п. функция* $F(x; y)$ *класса* D *имела более одного э.-п. продолжения, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна из её каналовых функций продолжалась неоднозначно.*

Из теоремы 1 вытекает следующее свойство э.-п. функций. Пусть $F(x; y)$ э -п функция, определенная в полосе $(-\infty < x < \infty, -2a \leqslant y \leqslant 2a)$, такая, что $F(x; 0)$ почти периодическая функция. Если $\tilde{F}(x; y)$ ее э.-п. продолжение, то $\tilde{F}(x; y_0)$ почти периодическая функция. При этом множество показателей Фурье функции $F(x; y_0)$ не шире множества показателей Фурье функции $\tilde{F}(x; o)$. Из последнего замечания и теоремы 1 непосредственно следует необходимое и достаточное условие того, чтобы э.-п. функция $F(x; y)$, заданная в полосе $(-\infty < x < \infty, -2a \leqslant y \leqslant 2a)$ и почти периодическая на оси, допускала э.-п. почти периодическое продолжение на всю плоскость. Для этого необходимо и достаточно, чтобы все каналовые функции $\varphi(\lambda_k; y)$ э.-п. функции $F(x; y)$ допускали почти периодические э.-п. продолжения с отрезка $[-2a, 2a]$ на всю ось. Заметим, что последнее всегда имеет место, если функции $\varphi(\lambda_k; y)$ неоднозначно продолжимы ([5,6]).

Вышеизложенное показывает, что хотя в общем случае э.-п. функция $F(x; y)$ обладает большим множеством э.-п. продолжений, все же задача описания всех ее э.-п. продолжений сводится к описанию продолжений э.-п. функций одного переменного, полностью решенной в ([6]).

Заметим, что пользуясь понятием положительно-определенной оператор-функции, можно получать представления функций положительно-определенных в различных смыслах.

2. Приведем примеры, иллюстрирующие изложенное выше.

Будем называть функцию $F(x; j)$ $(-2a \leqslant x \leqslant 2a, j=0, \pm 1, \cdots \pm n)$ *эрмитово-положительной*, если ядро $F(t-s; j-k)$ положительно определенное.

Возьмем любую неоднозначно продолжимую э.-п. функцию $f(x)$ $(-2a \leqslant x \leqslant 2a)$ и какое-нибудь ее каноническое представление $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \rho_k e^{i\lambda_k x}$. Полагая

$$F(x; 0) = f(x), \quad F(x; 1) = \rho_1 e^{i\lambda_1 x} - \rho_2 e^{i\lambda_2 x}, \quad F(x; -1) = F(-x; 1),$$

получим э.-п. функцию $F(x; j)$, заданную при $-2a \leqslant x \leqslant 2a$, $j=0, \pm 1$. $F(x; j)$ однозначно продолжается по континуальному аргументу [7]. Однако по совокупности аргументов она продолжается неоднозначно. Действительно, в данном случае роль каналовых функций будут играть такие тройки чисел $\{c^{(1)}\}$: (1; 1; 1), $\{c^{(2)}\}$: (−1; 1; −1), $\{c^{(j)}\}$: (0; 1; 0).

$|c^{(1)}|$ и $|c^{(2)}|$ однозначно продолжаются до положительно определенной последовательности, а остальные неоднозначно.

Определим теперь функцию $F(x;j)$ $(-2a \leqslant x \leqslant 2a)$ $j = 0, \pm 1$ равенствами

$$F(x;0) = f(x),\ F(x;1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k \rho_k e^{i\lambda_k x}$$

$$F(x;-1) = \overline{F(-x,1)},\quad \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1,\quad |\varepsilon_k| = 1.$$

Так как в данном случае все тройки чисел $\{c^{(j)}\}$ однозначно продолжаются до положительно определенной последовательности, то $F(x;j)$ однозначно продолжается как э.-п. функция.

Пусть $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k e^{i\lambda_k x}$ некоторая э.-п. функция. Положим

$$F(x;0) = f(x),\quad F(x;1) = qf(x),\quad F(x;-1) = \overline{F(-x;1)},\quad |q| \leqslant 1,$$
$$-\infty < x < \infty,\ j = 0, \pm 1.$$

Функция $F(x;j)$ является „произведением" э.-п. функции $f(x)$ и усеченной положительно определенной последовательности $(\bar{q}, 1, q)$, а потому сама эрмитово-положительна. Роль каналовых функций будет играть одна и та же тройка чисел $\{c\} : (\bar{q}, 1, q)$. Если при всех λ_k, $\{c\}$ продолжать одинаково до положительно определенной последовательности, то будем получать продолжения, равные „произведениям" продолжений. Если хотя бы два продолжения $\{c\}$ будут различными, то получим продолжения, отличные от „произведения" продолжений. Последний пример показывает, что продолжение по одному аргументу, вообще говоря, не определяет продолжения по совокупности аргументов.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность чл.-корр. АН УССР М. Г. Крейну за предложенный круг вопросов и постоянное руководство.

Одесский инженерно-строительный институт

Ի. Ե. ՕՎՉԱՐԵՆԿՈ

Էրմիթյան դրական ֆունկցիաների շարունակման մասին

Հայտնի է, որ $-\infty < x < \infty$, $-2a < y < 2a$ շերտում տված էրմիթյան դրական ֆունկցիան կարելի է շարունակել ամբողջ հարթության մեջ: Հոդվածում քննարկված է էրմիթյան դրական շարունակությունների նկարագրության հարցը, որը մինչև վերջ լուծվում է որոշ դասի ֆունկցիաների համար: Տրվում է նաև անհրաժեշտ և բավարար պայման մեկից ավելի շարունակություններ ունենալու համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. С. Лившиц*. О зеркально сопряженных и самосопряженном расширениях симметрических операторов, М., 1945. [2] *Г. И. Эскин*. ДАН, 133, № 3, 544—543 (1960). [3] *A. Devinatz*, Acta mathem., 102 : 1—2, 109—134. [4] *М. Г. Крейн*, Сб. трудов Ин-та математики АН УССР, 11, 37—112. [5] *М. Г. Крейн*, УМН, 1, 2, 3—66. 1949. [6] *М. Г. Крейн*, ДАН, 26, № 1 (1940). [7] *И. Е. Овчаренко*. ДАН, т. 154, № 5 (1964).